संख्या मालिका

लेखक : श्री. दिलीप गोटखिंडीकर

अनुक्रमणिका

1) अंक आणि संख्या 3

2) संख्यामधील अंकांच्या स्थानिक किमती 7

3) नैसर्गिक, पूर्ण, पूर्णांक, सम आणि विषम संख्या 9

4) अंकगणिती श्रेढी 12

5) भूमिती श्रेढी 16

6) त्रिकोणी संख्या, वर्ग संख्या मालिका व घन संख्या मालिका 20

7) पंचकोनीय संख्या, षटकोनीय संख्या 28

8) फिबोनकी संख्या मालिका 31

9) स्वयंभू संख्यांच्या मालिका आणि त्यांचे संगम 37

10) हर्षद संख्यांच्या मालिका 41

11) संख्या मालिकांचे अंर्तफरक (Intra differences) 43

12) उपसंहार 48

01. अंक आणि संख्या

मोजण्याच्या गरजेतून 'संख्या' ही संकल्पना आली. संख्या लेखनासाठी 'अंक चिन्हांची' निर्मिती झाली. जगात अनेक अंकलेखनपद्धती आहेत. त्यापैकी काही अंकलेखनपद्धती पुढील प्रमाणे,

आपल्या भारत देशातील विविध भाषांमध्ये 'एक ते नऊ' आणि 'शून्य' या संख्यांसाठी वापरात असणारे अंक पुढील सारणीत दिले आहेत.

मराठी	काश्मिरी (शारदा)	पंजाबी (गुरूमुखी)	बंगाली व (असमिया)	ओडिया (उडिया)	गुजराती	हिंदी	उर्दू	सिंधी	तेलुगू	कन्नड	मलयाळम्	तामिळ
१	𑇑	੧	১	୧	૧	१	۱	۱	౧	೧	൧	௧
२	𑇒	੨	২	୨	૨	२	۲	۲	౨	೨	൨	௨
३	𑇓	੩	৩	୩	૩	३	۳	۳	౩	೩	൩	௩
४	𑇔	੪	৪	୪	૪	४	۴	۴	౪	೪	൪	௪
५	𑇕	੫	৫	୫	૫	५	۵	۵	౫	೫	൫	௫
६	𑇖	੬	৬	୬	૬	६	۶	۶	౬	೬	൬	௬
७	𑇗	੭	৭	୭	૭	७	۷	۷	౭	೭	൭	௭
८	𑇘	੮	৮	୮	૮	८	۸	۸	౮	೮	൮	௮
९	𑇙	੯	৯	୯	૯	९	۹	۹	౯	೯	൯	௯
०	𑇐	੦	০	୦	૦	०	۰	۰	౦	೦		

रोमन संख्यालेखन पद्धती : या पद्धतीमध्ये विशिष्ट संख्यांसाठी वर्णमालेतील विशिष्ट अक्षरे पुढील प्रमाणे वापरली जातात.

संख्या	चिन्ह	संख्या	चिन्ह
एक	I	पाच	V
दहा	X	पन्नास	L
शंभर	C	पाचशे	D
एक हजार	M		

जगातील काही महत्त्वाच्या अंकलेखन पद्धती

आधुनिक मराठी	ईजिप्त हायरोग्लिफिक	ईजिप्त हिअरेटिक	बॅबिलोनिया	ग्रीक ॲटिक	ग्रीक आयोनियन	चिनी दंड	चिनी चिन्हांकित	रोमन	हिब्रू	माया	अरबी अक्षरांकित	अरबी गुबार	अरबी आधुनिक	आधुनिक पाश्चिमात्य
१	𓏺	[illegible]	𒁹	I	Α	𝍠	一	I	א	𝋡	ا	/	١	1
२	𓏻	[illegible]	𒈫	II	Β	𝍡	二	II	ב	𝋢	ب	[illegible]	٢	2
३	𓏼	[illegible]	𒐈	III	Γ	𝍢	三	III	ג	𝋣	ج	[illegible]	٣	3
४	𓏽	[illegible]	𒐉	IIII	Δ	𝍣	四	IIII	ד	𝋤	د	[illegible]	٤	4
५	𓏾	[illegible]	𒐊	Γ	Ε	𝍤	五	V	ה	𝋥	ه	[illegible]	٥	5
६	𓏿	[illegible]	𒐋	ΓI	F	𝍥	六	VI	ו	𝋦	و	[illegible]	٦	6
७	𓐀	[illegible]	𒑂	ΓII	Ζ	𝍦	七	VII	ז	𝋧	ز	[illegible]	٧	7
८	𓐁	[illegible]	𒐍	ΓIII	Η	𝍧	八	VIII	ח	𝋨	ح	[illegible]	٨	8
९	𓐂	[illegible]	𒐎	ΓIIII	Θ	𝍨	九	IX	ט	𝋩	ط	9	٩	9
१०	𓎆	[illegible]	𒌋	Δ	Ι	𝍩	十	X	י	𝋪	ي	/o	١٠	10
२०	𓎇	[illegible]	𒎙	ΔΔ	Κ	𝍪	二十	XX	כ	𝋡/𝋠	ك	2o	٢٠	20
३०	𓎈	[illegible]	𒌍	ΔΔΔ	Λ	𝍫	三十	XXX	ל	𝋡/𝋪	ل	[illegible]	٣٠	30
४०	𓎉	[illegible]	𒐏	ΔΔΔΔ	Μ	𝍬	四十	XL	מ	𝋢/𝋠	م	[illegible]	٤٠	40
५०	𓎊	[illegible]	𒐐	𐅄	Ν	𝍭	五十	L	נ	𝋢/𝋪	ن	[illegible]	٥٠	50
६०	𓎋	[illegible]	𒁹	𐅄Δ	Ξ	𝍮	六十	LX	ס	𝋣/𝋠	س	[illegible]	٦٠	60
७०	𓎌	[illegible]	𒁹𒌋	𐅄ΔΔ	Ο	𝍯	七十	LXX	ע	𝋣/𝋪	ع	[illegible]	٧٠	70
८०	𓎍	[illegible]	𒁹𒎙	𐅄ΔΔΔ	Π	𝍰	八十	LXXX	פ	𝋤/𝋠	ف	[illegible]	٨٠	80
९०	𓎎	[illegible]	𒁹𒌍	𐅄ΔΔΔΔ	Q	𝍱	九十	XC	צ	𝋤/𝋪	ص	9o	٩٠	90
१००	𓍢	[illegible]	𒁹𒐏	H	Ρ	𝍠	百	C	ק	𝋥/𝋠	ق	/oo	١٠٠	100
२००	𓍣	[illegible]	𒐈𒎙	HH	Σ	𝍡	二百	CC	ר	𝋪/𝋠	ر	2oo	٢٠٠	200
३००	𓍤	[illegible]	𒐊	HHH	Τ	𝍢	三百	CCC	ש	𝋯/𝋠	ش	[illegible]	٣٠٠	300
४००	𓍥	[illegible]	𒐋𒐏	HHHH	Υ	𝍣	四百	CD	ת	𝋡/𝋠/𝋠	ت	[illegible]	٤٠٠	400
५००	𓍦	[illegible]	𒐍𒎙	𐅅	Φ	𝍤	五百	D	ך	[illegible]	ث	[illegible]	٥٠٠	500
६००	𓍧	[illegible]	𒌋	𐅅H	Χ	𝍥	六百	DC	ם	[illegible]	خ	[illegible]	٦٠٠	600
७००	𓍨	[illegible]	𒌋𒁹𒐏	𐅅HH	Ψ	𝍦	七百	DCC	ן	[illegible]	ذ	[illegible]	٧٠٠	700
८००	𓍩	[illegible]	𒌋𒐈𒎙	𐅅HHH	Ω	𝍧	八百	DCCC	ף	[illegible]	ض	[illegible]	٨٠٠	800
९००	𓍪	[illegible]	𒌋𒐊	𐅅HHHH	ϡ	𝍨	九百	CM	ץ	[illegible]	ظ	9oo	٩٠٠	900
१०००	𓆼	[illegible]	[illegible]	X			千	M				/ooo	١٠٠٠	1000

सध्या जगात सर्वत्र 'आंतरराष्ट्रीय अंक' चिन्हांचा उपयोग करून संख्यालेखन केले जाते. शून्य ते नऊ या अंकासाठी 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 आणि 9 ही दहा अंकचिन्हे वापरली जातात. ब्रिटिश एनसायक्लोपिडिया मध्ये या अंकचिन्हांचा उल्लेख 'हिंदू-अरेबिक न्युमरलस्' असा आहे. या अंक चिन्हांचा उपयोग करून जे संख्या लेखन केले जाते त्याला दशमान संख्याप्रणाली असे म्हटले जाते. जगात सध्या सर्वसामान्यपणे 'दशमान संख्या प्रणालीमध्येच' संख्या लेखन केले जाते. या दहा अंकचिन्हांना 'डिट्स्' असेही म्हणतात.

द्विमान संख्याप्रणाली मध्ये केवळ 0 अणि 1 दोनच अंक चिन्हे वापरली जातात. त्यांना बीट्स (Bit : binary digits) असे म्हणतात.

संगणकीय गणितासाठी द्विमान संख्या प्रणालीचा उपयोग होतो. काही संख्या प्रणाली आणि त्यामध्ये वापरली जाणारी अंक चिन्हे पुढील प्रमाणे आहेत.

संख्या प्रणाली	**अंक चिन्हे**
द्विमान	0 आणि 1
त्रिमान	0, 1 आणि 2
चर्तुमान	0, 1, 2, आणि 3
पंचमान	0, 1, 2, 3, आणि 4
अष्टचिन्ह पद्धत	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 आणि 7
दशमान पद्धत	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 आणि 9
षोडश चिन्ह पद्धत	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,A, B, C, D, E आणि F

काही संख्या प्रणाली आणि त्यांच्यातील संख्या लेखन पुढील प्रमाणे आहे.

द्विमान	**त्रिमान**	**चर्तुमान**	**पंचमान**	**अष्टचिन्ह पद्धती**	**दशमान**	**षोडश चिन्हपद्धत**
0000	000	00	00	000	0	0
0001	001	01	01	001	1	1
0010	002	02	02	002	2	2
0011	010	03	03	003	3	3
0100	011	10	04	004	4	4
0101	012	11	10	005	5	5
0110	020	12	11	006	6	6
0111	021	13	12	007	7	7
1000	022	20	13	010	8	8
1001	100	21	14	011	9	9
1010	101	22	20	012	10	A

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 संख्या मालिका 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22

द्विमान	त्रिमान	चर्तुमान	पंचमान	अष्टचिन्ह पद्धती	दशमान	षोडश चिन्हपद्धत
1011	102	23	21	013	11	B
1100	110	30	22	014	12	C
1101	111	31	23	015	13	D
1110	112	32	24	016	14	E
1111	120	33	30	017	15	F
10000	121	100	31	020	16	10
10001	122	101	32	021	17	11
10010	200	102	33	022	18	12
10011	201	103	34	023	19	13
10100	202	110	40	024	20	14

❑ ❑ ❑

02. संख्यांमधील अंकांच्या स्थानिक किमती

अंकांच्या (अंकचिन्हांचा Dits) उपयोग करून संख्या लेखन करताना अंकांच्या स्थानपरत्वे किमतींना महत्व असते. यालाच संख्येतील अंकाची स्थानिक किंमत असे म्हणतात. याबाबतचे दोन श्लोक प्रसिद्ध आहेत.

एकदशशतसहस्रायुतलक्ष प्रयुतकोट्यः क्रमशः ।
अर्बुदमब्जं खर्वनिखर्वमहापद्मशंकवस्तस्मात् ॥
जलधिंचन्त्यं मध्यं परार्धमिति दशगुणोत्तरं संज्ञाः ।
संख्यायाः स्थानानां व्यवहारार्थ कृताः पूर्वैः ॥

अर्थः (उजवीकडून डावीकडे) अनुक्रमाने एकक, दशक, शतक, हजार, अयुत (दहा हजार), लाख, प्रयुत (दहा लाख), कोटी, अर्बुद (दहा कोटी) अब्ज (शंभर कोटी), खर्व (हजार कोटी), निखर्व (दहा हजार कोटी), महापद्म (एक लाख कोटी), शंकू (दहा लाख कोटी), जलधि (कोटी कोटी), अंत्य (दहा कोटी कोटी), मध्य (अब्ज कोटी), आणि परार्ध (दहा अब्ज कोटी) अशी मूल्ये (स्थानिक किमती) पूर्वीच्या लोकांनी करून ठेवलेली आहेत. प्रत्येक स्थानाची किमत उजवीकडील स्थानाच्या किमतीच्या दहा पट आहे.

अंकांची स्थानिक किंमत स्थानपरत्वे (उजवीकडून डावीकडे) वाढत जाते ही गोष्ट भारतीय गणितज्ञांनीच प्रथम शोधून काढली. ग्रीक व रोमन लोक संख्यालेखनासाठी अक्षर लिपिचा (किंवा वर्णाक्षरांचा) उपयोग करत होते. ज्या अंकचिन्हांना आज आंतरराष्ट्रीय अंक असे म्हटले जाते ती अंकचिन्हे ही मूळची भारतातील आहेत. मसाल्याच्या पदार्थांचा व्यापार करताना ही भारतीय अंकचिन्हे अरब देशांच्या मार्फत युरोपमध्ये पोहोचलेली आहेत असे युरोपिय लोक मान्य करतात. इंग्रजी मध्ये Unit, ten, hundred, thousand, lac(lakh), million (ten lakh, one thousands), crore, billion (a million millions), trillion (a million cubed) अशा प्रकारच्या स्थानिक किमती आहेत. पुढील सारणीचे काळजीपूर्वक निरीक्षण करा.

स्थान	स्थानिक किंमत	स्थानिक किंमत	सममूल्य इंग्रजी शब्द
एकक	10^0	1	Unit
दशक	10^1	10	Ten
शतक	10^2	100	Hundred
हजार	10^3	1000	Thousand
(अयुत) दहाहजार	10^4	10000	Ten thousand
(नियुत) लाख	10^5	100000	Lac/Lakh

स्थान	स्थानिक किंमत	स्थानिक किंमत	सममूल्य इंग्रजी शब्द
(प्रयुत) दहा लाख	10^{6}	1000000	Million
कोटी	10^{7}	10000000	Crore
(अर्बुद) दहा कोटी	10^{8}	100000000	Ten crore
(पद्म) अब्ज	10^{9}	1000000000	Hundred crore
खर्व	10^{10}	10000000000	Thousand crore
निखर्व	10^{11}	100000000000	---
महापद्म	10^{12}	1000000000000	Billion
शंकू	10^{13}	10000000000000	Ten billion
(समुद्र) जलधि	10^{14}	100000000000000	hundred billion
अंत्य	10^{15}	1000000000000000	Thousand billion
मध्य	10^{16}	10000000000000000	---
परार्ध	10^{17}	100000000000000000	Lac billion
	10^{18}	1000000000000000000	Trillion

प्राचीन वाङमयात नियुत (लक्ष), समुद्र (शतकोटी) असे संख्यावाचक शब्दही आढळून येतात.

द्विमान संख्याप्रणाली मध्ये अंकांच्या स्थानिक किमती (उजवीकडून डावीकडे) अनुक्रमे 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024,....या प्रमाणे आहेत म्हणजे 2^{10} म्हणून 1024 ला 'किलो' असेही म्हटले जाते.

त्रिमान संख्या प्रणाली मध्ये अंकांच्या स्थानिक किमती (उजवीकडून डावीकडे) अनुक्रमे 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2^{10}, 2187, 6561, 19683,....या प्रमाणे आहेत.

चर्तुमान संख्या प्रणालीमध्ये अंकांच्या स्थानिक किमती अनुक्रमे (उजवीकडून डावीकडे) 1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384,.... या प्रमाणे आहेत.

03. नैसर्गिक संख्या, पूर्ण संख्या, पूर्णांक संख्या, समसंख्या, विषमसंख्या

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... या संख्यांना **नैसर्गिक संख्या (किंवा मोजसंख्या)** असे म्हणतात. सामान्यपणे हा अनंत संख्यासंच 'N' या अक्षराने दर्शवितात.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,....या संख्यांना **पूर्ण संख्या** असे म्हणतात. सामान्यपणे पूर्ण संख्यांचा संच 'W' या अक्षराने दर्शवितात. नैसर्गिक संख्यांचा संच हा पूर्ण संख्यासंचाचा उपसंच आहे.

ऋण पूर्णांक {-1, -2, -3, -4,....} आणि पूर्ण संख्या यांच्या संयोगाने **'पूर्णांक संख्या संच'** तयार होतो. पूर्णांक संख्या संच "I' या अक्षराने दर्शवितात. नैसर्गिक संख्यासंच, पूर्ण संख्यासंच, धन पूर्णांकांचा संच आधि ऋण पूर्णांकांचा संच हे सर्व संच पूर्णांक संख्यासंचाचे उपसंच आहेत.

एखाद्या संख्या संचातील प्रत्येक संख्या व तिचा स्थान क्रमांक या मध्ये असलेल्या विशिष्ट संबंधाने संचातील सर्व संख्यांची मांडणी केलेली असते तेंव्हा त्या क्रमित मांडणीला **'क्रमिका'** (sequence) असे म्हणतात.

दिलेल्या संख्या क्रमिकेतील कोणत्याही दोन क्रमागत संख्यांमधील फरक स्थिर (Constant) असेल तर त्या संख्या क्रमिकेला **'अंकगणिती श्रेढी'** असे म्हणतात.

नैसर्गिक संख्यासंच, पूर्ण संख्यासंच आणि पूर्णांक संख्यासंच मधील घटक चढत्या (किंवा उतरत्या) क्रमाने मांडले असता 'अंकगणिती श्रेढी' तयार होतात. या संख्याश्रेढी मधील दोन क्रमागत संख्यांमधील फरक 'एक' असतो. उदा. 1,2,3,4,5,6,....

ज्या पूर्णांक संख्यांना 'दोनने' निःशेष भाग जातो त्या संख्यांना सम संख्या असे म्हणतात. 2, 4, 6, 8, 10,.... या सम संख्या आहेत. कोणत्याही पूर्णांक संख्येची दुप्पट केली असता सम संख्या मिळते. उदा. 6 x 2 =12, 5 X 2 = 10. आपणास सम संख्या चढत्या (किंवा उतरत्या) क्रमाने मांडल्या असता सम संख्यांची अंकगणिती श्रेढी तयार होते. अशावेळी कोणत्याही दोन क्रमागत संख्यांमधील फरक 'दोन' असतो. कोणत्याही दोन समसंख्यांची बेरीज सम संख्याच असते आणि कोणत्याही सम संख्यांमधील फरक देखील सम संख्याच असते.

ज्या पूर्णांक संख्यांना दोनने निःशेष भाग जात नाही (ज्या पूर्णांक संख्यांना दोनने भागले असता 'एक' बाकी उरते) त्या संख्यांना विषम संख्या असे म्हणतात. कोणत्याही पूर्णांक संख्येच्या दुप्पटीतून एक वजा केला किंवा कोणत्याही पूर्णांक संख्येचा दुप्पटीमध्ये एक मिळविला असता विषम संख्या मिळते. विषम संख्या चढत्या (किंवा उतरत्या) क्रमाने मांडल्या असता विषम संख्यांची अंकगणिती श्रेढी तयार होते. कोणत्याही दोन क्रमागत विषम संख्यांमधील फरक 'दोन' असतो. कोणत्याही दोन विषम संख्यांची बेरीज ही नेहमी समसंख्या असते. तसेच कोणत्याही दोन विषम संख्यांमधील फरक हा सम संख्यांच असतो. ही माहिती आपणास चिन्हांच्या साहाय्याने पुढील प्रमाणे मांडता येते.

N = {1, 2, 3, 4, 5, 6,...}

W = {0, 1, 2, 3, 4, 5,... }

I = {...-3,- 2, -1, 0, 1,2, 3,...}

E = {x | x ही 2 ने भाग जाणारी पूर्णांक संख्या }

O = {x | x ही 2 ने न भाग जाणारी पूर्णांक संख्या }

या संख्या संचांमध्ये (संख्या श्रेढींमध्ये) आपल्याला पुढील वैशिष्टये आढळून येतात.

i) कोणत्याही दोन नैसर्गिक संख्याची बेरीज किंवा गुणाकार हा नैसर्गिक संख्याच असते.
ii) कोणत्याही दोन पूर्णांक संख्यांची बेरीज, वजाबाकी किंवा गुणाकार हा नेहमी पूर्णांक संख्याच असते.
iii) कोणत्याही दोन पूर्ण संख्यांची बेरीज किंवा गुणाकार हा पूर्ण संख्याच असते.
iv) कोणत्याही दोन सम संख्यांची बेरीज किंवा गुणाकार हा सम संख्याच असते.
v) कोणत्याही दोन विषम संख्यांचा गुणाकार हा विषम संख्याच असतो.
vi) कोणत्याही दोन विषम संख्यांची बेरीज किंवा वजाबाकी ही सम संख्याच असते.
vii) कोणत्याही दोन नैसर्गिक संख्यांची वजाबाकी नैसर्गिक संख्या असेलच असे नाही.
viii) कोणत्याही दोन पूर्ण संख्यांची वजाबाकी पूर्ण संख्या असेलच असे नाही.
ix) कोणत्याही दोन नैसर्गिक संख्यांची किंवा पूर्ण संख्यांची वजाबाकी ही नेहमी पूर्णांक संख्याच असते.
x) एक सम संख्या आणि एक विषम संख्या यांचा गुणाकार नेहमी सम संख्याच असतो.
Xi) एक सम संख्या आणि एक विषम संख्या यांची बेरीज ही नेहमी विषम संख्या असते.
xii) एक सम संख्या आणि एक विषम संख्या यांची वजाबाकी नेहमी विषम संख्याच असते.

चिन्हांच्या मदतीने संख्यांबाबतचे नियम पुढीलप्रमाणे लिहिता येतात. $\in$ या खुणेचा अर्थ 'चा घटक असणे' असा आहे. उदा संच A = {5, 6, 9} तर 6 हे A संचाचा घटक आहेत हे $6\in A$ असे दाखवितात व 6 हा A चा घटक आहे असे वाचतात.

i) जर a आणि $b \in N$, तर $a + b \in N$, $a, b \in N$
ii) जर a आणि $b \in W$, तर $a + b \in W$, $a, b \in W$
iii) जर a आणि $b \in I$, तर $a + b \in I$, $a, b \in I$
iv) जर a आणि $b \in I$, तर $a - b \in I$
v) जर a आणि $b \in E$, तर $a + b \in E$, $a - b \in E$
vi) जर a आणि $b \in O$, तर $ab \in O$
vii) जर a आणि $b \in O$, तर $a + b \in E$, $a - b \in E$
viii) जर a आणि $b \in N$, तर $a - b \in I$
ix) जर a आणि $b \in W$, तर $a - b \in W$
x) जर $a \in E$, आणि $b \in O$ तर $ab\in E$
Xi) जर $a \in E$, आणि $b \in o$ तर $a+b\in O$
xii) जर $a \in E$, आणि $B \in O$ तर $a-b\in O$

विषम संख्यांच्या मांडणीचे काही गुणविशेष पुढीलप्रमाणे आहेत.

1	=	1
1 + 3	=	4
1 + 3 + 5	=	9
1 + 3 + 5 + 7	=	16
1 + 3 + 5 + 7 + 9	=	25
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11	=	36
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13	=	49
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15	=	64
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 +15 +17	=	81
1 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19	=	100

या मांडणीचे काळजीपूर्वक निरीक्षण केले असता असे आढळून येते की, n ही कोणतीही नैसर्गिक संख्या असेल तर $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + (2n - 1) = n^2$ म्हणजेच पहिल्या "n' धन विषम संख्यांची बेरीज "n^2' इतकी असते.

विषम संख्यांची मांडणी आणखी एका पद्धतीने केली असता त्या मांडणीचे गुणविशेष पुढील प्रमाणे आढळून येतात.

1	=	1
3 + 5	=	8
7 + 9 + 11	=	27
13 + 15 + 17 + 19	=	64
21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31	=	125
31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41	=	216
43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55	=	343
57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71	=	512
73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89	=	729

या मांडणीमध्ये आपल्याला काही विषम संख्यांच्या बेरजेने पूर्ण घन संख्या मिळालेल्या आहेत.

सम संख्यांच्या मांडणी मध्येही आपल्याला काही गुणविशेष आढळून येतात. सम संख्यांच्या मांडणीचे काळजीपूर्वक निरीक्षण करा आणि या मांडणीचे गुणविशेष समजवून घेऊ या.

2	=	2	=	1 X 2
2 + 4	=	6	=	2 x 3
2 + 4 + 6	=	12	=	3 x 4
2 + 4 + 6 + 8	=	20	=	4 x 5
2 + 4 + 6 + 8 + 10	=	30	=	5 x 6
2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12	=	42	=	6 x 7
2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14	=	56	=	7 x 8
2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16	=	72	=	8 x 9
2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18	=	90	=	9 x 10

4. अंकगणिती श्रेढी

एखाद्या संख्या संचातील प्रत्येक संख्या व तिचा स्थान क्रमांक यामध्ये असलेल्या विशिष्ट संबंधाने संचातील संख्यांची क्रमवार मांडणी केलेली असते तेंव्हा त्या क्रमित मांडणीला **'क्रमिका (Sequence)'** असे म्हणतात.

नैसर्गिक संख्यासंच, पूर्ण संख्यासंच, पूर्णांक संख्यासंच, सम संख्यासंच, विषम संख्यासंच या 'क्रमिका' आहेत.

जेंव्हा दिलेल्या संख्या क्रमिकेतील कोणत्याही दोन क्रमागत संख्यांमधील फरक स्थिर असेल तर त्या संख्या क्रमिकेला 'अंकगणिती श्रेढी' असे म्हणतात.

नैसर्गिक संख्यासंच, पूर्ण संख्यासंच, पूर्णांक संख्यासंच, विषम संख्यासंच आणि सम संख्यासंच या 'अंकगणिती श्रेढी' आहेत. या शिवाय आणखी काही अंक गणिती श्रेढींची उदाहरणे पुढील प्रमाणे.

i) 1, 4, 7,10, 13, 16, 19, 22, 25, 28,.... फरक 3 चा

ii) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29,.... फरक 4 चा

iii) 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36,.... फरक 5 चा

iv) 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43,.... फरक 6 चा

v) 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50,.... फरक 7 चा

या सर्व अंकगणिती श्रेढींमध्ये केवळ नैसर्गिक संख्यांचा समोवश असून प्रत्येक क्रमिकेतील प्रथम पद 'एक' आहे. या सर्व 'अंकगणिती श्रेढी' आहेत. कारण कोणत्याही क्रमिकेतील कोणत्याही दोन क्रमागत संख्यांमधील फरक स्थिर (Constant) आहे. या सर्व 'अंकगणित श्रेढींचा' एक गुणविशेष असा आहे की, कोणत्याही एका अंकगणित श्रेढीतील दोन संख्यांचा गुणाकार करून मिळणारी संख्या ही त्याच अंकगणित श्रेढी मध्येच असल्याचे आढळून येईल. वरील पहिल्या श्रेढीत 4 x 7 = 28 हे श्रेढीत आहेत.

आता पुढील क्रमिकांचे काळजीपूर्वक निरीक्षण करा.

1) 13, 17, 21, 25, 29,....

2) 87, 84, 81, 78, 75,....

3) 1.6, 2.8, 4.0, 5.2, 6.4,....

4) $1\frac{2}{7}$, $2\frac{4}{7}$, $3\frac{6}{7}$, $5\frac{1}{7}$, $6\frac{3}{7}$, $7\frac{5}{7}$,....

5) $9\frac{6}{11}$, $8\frac{7}{11}$, $7\frac{8}{11}$, $6\frac{9}{11}$, $5\frac{10}{11}$,....

या सर्व अंकगणिती श्रेढी आहेत असे निश्चितपणे म्हणता येते. 13, 17, 21, 25, 29,.... या क्रमिकेतील प्रथमपद = a = 13 आहे. आणि साधारण फरक = d = 4 आहे. या क्रमिकेची मांडणी आपल्याला पुढील प्रमाणे करता येईल. (13), (13 + 1 x 4),

(13 + 2 x 4), (13 + 3 x 4), (13 + 4 x 4),.... म्हणजेच 13, 17, 21, 25, 29,.... या क्रमिकेतील "n' वे पद 13 + (n - 1) x 4 हे आहे.

87, 84, 81, 78, 75,.... या क्रमिकेतील

प्रथम पद = t_1 = a = 87 आहे.

द्वितीय पद = t_2 = a - 3 = 84 आहे.

तृतीय पद = t_3 = a - 6 = 81 आहे.

चतुर्थ पद = t_4 = a - 9 = 78 आहे.

पाचवे पद = t_5 = a - 12 = 75 आहे.

या निरीक्षणांवरून असे म्हणता येते की या अंकगणिती श्रेढीतील "n' वे पद t_n = 87 - (n - 1) x 3 होय. कारण या श्रेढीमध्ये साधारण फरक = d = - 3 होय. म्हणून दिलेल्या अंकगणित श्रेढींची एक सारणी तयार करता येईल.

क्रमिका / अंकगणित श्रेढी	प्रथम पद	साधारण फरक	सामान्यपद "n' वे पद
Arithmetic Progression	a	d	t_n
1, 3, 5, 7, 9, 11,....	1	2	2n - 1
2, 4, 6, 8, 10, 12,....	2	2	2n
1, 6, 11, 16, 21, 26,....	1	5	5n - 4
13, 17, 21, 25, 29,....	13	4	4n + 9
87, 84, 81, 78, 75,....	87	- 3	90 - 3n
1.6, 2.8, 4, 5.2, 6.4	1.6	1.2	1.2n + 0.4
$1\frac{2}{7}$, $2\frac{4}{7}$, $3\frac{6}{7}$, $5\frac{1}{7}$,....	$1\frac{2}{7}$	$1\frac{2}{7}$	9n ÷7
$9\frac{6}{11}$, $8\frac{7}{11}$, $7\frac{8}{11}$, $6\frac{9}{11}$,....	$9\frac{6}{11}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{115 - 10n}{11}$

प्रत्येक संख्येचा पाढा ही एक अंकगणिती श्रेढीच होय.

सर्व सामान्यपणे अंकगणित श्रेढी पुढील पद्धतीने लिहिता येते. a = प्रथमपद, d = साधारण फरक आणि t_n = सामान्य पद

t_1 = a

t_2 = a + d

t_3 = a + 2d

t_4 = a + 3d

....

tn = a + (n - 1) d

a ची किंमत कोणतीही वास्तव संख्या असू शकते. d ची किंमत ही नेहमी शून्येतर संख्या असते. ($d \neq 0$) आणि n ची किंमत ही नेहमी नैसर्गिक संख्या असते. ($n \in N$) अंकगणिती श्रेढी शोधण्यासाठी a आणि d यांची किंमत माहीत असावी लागते. (किंवा शोधून काढावी लागते.)

जर तीन संख्या अंकगणित श्रेढीतील असतील तर मधली संख्या इतर दोन संख्यांच्या सरासरी एवढी असते.

उदाहरणार्थ : एका अंकगणित श्रेढीचे 22 वे पद 153 आहे आणि 37 वे पद 453 आहे तर ती अंकगणिती श्रेढी शोधा आणि त्या श्रेढीचे 16 वे पद कोणते ते सांगा.

उकल : येथे t_{22} = 153 आणि t_{37} = 453 असे दिलेले आहे.

$\therefore t_{22} = a + (22 - 1) d = 153 = a + 21d$

$\therefore$ आणि $t_{37} = a + (37 - 1) d = 453 a + 36d$

$\therefore (a + 36d) - (a + 21d) = 453 - 153$

$\therefore a + 36d - a - 21d = 300$

$\therefore 15d = 300$

$\therefore d = 20$

आणि $a + 21 d = 153$

$\therefore a + 21 (20) = 153$

$\therefore a + 420 = 153$

$\therefore a = 153 - 420 = - 267$

म्हणजे दिलेल्या अंकगणित श्रेढीचे प्रथमपद -267 आहे आणि साधारण फरक +20 आहे. म्हणून ती अंकगणित श्रेढी -267, -247, -227, -207, -187,.... अशी आहे. या अंकगणित श्रेढीचे 16 पद शोधू.

$\therefore t_n = a + (n - 1) d$

$\therefore t_{16} = -267 + (16 - 1) \times 20$

$\therefore t_{16} = -267 + 300$

$\therefore t_{16} = 33$

अंकगणित श्रेढी मध्ये असलेल्या संख्यांची बेरीज कशी शोधता येईल ते समजावून घेऊ.

समजा एका अंकगणित श्रेढीचे पहिले पद "a' आहे, अखेरचे पद 'k' आहे आणि साधारण फरक "d' आहे. तर ती अंकगणित श्रेढी पुढील दोन प्रकारांनी मांडता येईल.

i) a, a + d, a + 2d, a + 3d,....k किंवा ii) a,....k - 3d, k - 2d, k - d, l.

आता आपण या अंक गणित श्रेढीतील सर्व संख्यांची बेरीज कशी करता येईल ते पाहू.

'S_n' ही दिलेल्या पदांची बेरीज असेल तर

$S_n = a + (a + d) + (a + 2d)... (k - 2d) + (k - d) + k$

$S_n = k + (k - d) + (k - 2d).... (a + 2d) + (a + d) + a$

या दोन्ही मांडणींची बेरीज केली तर

$2 \times S_n = (a + k) + (a + k) + (a + k) .... (a + k)$

जर दिलेल्या अंकगणित श्रेढीमध्ये "n' पदे असतील तर

$2 \times S_n = n \times (a + k)$

$\therefore S_n = \frac{n}{2}(a + k)$

या वरुन आपल्याला "n' पदे असणाऱ्या अंकगणिती श्रेढीतील सर्व पदांची बेरीज ही [(प्रथमपद + अखेरचे पद) x एकूण पदांची संख्या ÷ 2] एवढी असते असे म्हणता येते.

∴ अखेरचे पद, k हे n वे पद असेल तर $t_n = k = a + (n - 1) d$ हि किंमत आपण वरील सूत्रात ठेवू

$\therefore S_n = \frac{n}{2}(a + \{ a + (n - 1) d \}]$

$\therefore Sn = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$

हे सूत्र आपण एका उदाहरणाच्या साहाय्याने समजावून घेऊ.

उदाहरणार्थ : 23 ने निःशेष भाग जाणाऱ्या सर्व तीन अंकी विषम संख्यांची बेरीज किती ?

उकल : 23 ने निःशेष भाग जाणारी लहानात लहान तीन अंकी विषम संख्या 115 आहे. तसेच 23 ने निःशेष भाग जाणारी मोठ्यात मोठी तीन अंकी विषम संख्या 989 आहे.

म्हणजेच उदाहरणात दिलेल्या अटींनुसार तयार होणाऱ्या अंकगणित श्रेढीतील पहिले पद 115 असून अखेरचे पद 989 आहे. (115 ही 23 ची पाच पट आहे आणि 989 ही 23 ची त्रेचाळीसावी पट आहे.)

115 नंतर येणाऱ्या 161, 207, 253,.... या तीन अंकी विषम संख्यांना 23 ने निःशेष भाग जातो. म्हणून या अंकगणित श्रेढीतील साधारण फरक 46 आहे. या अंकगणित श्रेढी मध्ये एकूण 20 पदे आहेत.

$\therefore$ a = 115, d = 46, k = 989 आणि n = 20

या किमतींचा उपयोग करून आपण 23 ने भाग जाणाऱ्या सर्व तीन अंकी विषम संख्यांची बेरीज शोधू.

$\therefore S_n = \frac{n}{2} [(a + 1) = \frac{20}{2} (115 + 989)$

$= 10 \times 1104 = 11040$

किंवा

$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d] = \frac{20}{2} [230 + 19 \times 46]$

$= 10 \times [230 + 874] = 2300 + 8740$

$= 11040$

म्हणजे 23 ने निःशेष भाग जाणाऱ्या सर्व तीन अंकी संख्यांची बेरीज 11040.

याप्रमाणे आपणही काही प्रश्न रचू शकता व सोडवू शकता.

5. भूमिती श्रेढी

जेंव्हा दिलेल्या संख्या क्रमिकेतील कोणत्याही दोन क्रमागत संख्याचे गुणोत्तर स्थिर (Constant) असेल ती त्या संख्या क्रमिकेला **'भूमिती श्रेढी'** असे म्हणतात.

भूमिती श्रेढीची काही उदाहरणे पुढील प्रमाणे

i) 1, 2, 4, 8, 16, 32,....

ii) 1, 3, 9, 27, 81, 243,....

iii) 1, 0.5. 0.25, 0.125, 0.0625,....

या सर्व भूमिती श्रेढींमध्ये प्रथम पद '1' आहे. एकाच श्रेढीतील कोणत्याही दोन क्रमागत संख्यांचे गुणोत्तर स्थिर आहे. म्हणजे पहिल्या श्रेढीत $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{4}{2} = 2$, $\frac{8}{4} = 2$ याप्रमाणे आणि प्रत्येक श्रेढीतील कोणत्याही दोन पदांच्या गुणाकाराने मिळणारी संख्या ही त्याच भूमिती श्रेढी मध्ये आहे. म्हणजे दुसऱ्या श्रेढीतील संख्यांचा गुणाकार 3 x 9 = 27, 9 x 27 = 243 त्याच श्रेढीत आहेत.

आता पुढील काही क्रमिकांचे काळजीपूर्वक निरीक्षण करा.

1) 16, 24, 36, 54, 81....

2) 1024, 512, 256, 128, 64,....

3) 20, 200, 2000, 20000, 200000,....

या सर्व भूमिती श्रेढी आहेत असे निश्चितपणे म्हणता येते. 16, 24, 36, 54, 81,.... या क्रमिकेतील प्रथम पद व a = 16 आहे. आणि साधारण गुणोत्तर (r) आहे.

$$r = \frac{24}{16} = \frac{36}{24} = \frac{54}{36} = \frac{81}{54} = ,,,,,,, = 1.5$$

दुसऱ्या उदाहरणाचा विचार करू.

1024, 512, 256, 128, 64,.... या भूमिती श्रेढी मध्ये a = 1024, r = 0.5

$t_1 = a = 1024$

$t_2 = ar = 1024 \times (o.5) = 512$

$t_3 = ar^2 = 1024 \times (0.5)^2 = 256$

$t_4 = ar^3 = 1024 \times (0.5)^3 = 128$

$t_5 = ar^4 = 1024 \times (0.5)4 = 64$

यावरून असे म्हणता येते की भूमिती श्रेढीचे प्रथम पद a असेल आणि साधारण गुणोत्तर (Common ratio) r असेल तर ती भूमिती श्रेढी a, ar, ar^2, ar^3, ar^4,.... या प्रमाणे मांडता येते. या भूमिती श्रेढीचे सर्वसाधारण पद (n वे पद)

$t_n = ar^{(n-1)}$ आहे असे म्हणता येते.

सर्व साधारणपणे असे म्हणता येते की भूमिती श्रेढीमध्ये प्रथम पद = a ही कोणतीही शून्येतर संख्या असू शकते. r ची किंमत 0 किंवा 1 पेक्षा वेगळी असणे आवश्यक असते. n ची किंमत कोणतीही नैसर्गिक संख्या असते.

[$a \neq 0$, $r \neq 0$ or $r \neq 1$, $n \in N$]

भूमिती श्रेढीमध्ये असणाऱ्या संख्यांना 'परंपरित प्रमाणात' असणाऱ्या संख्या असेही म्हणतात.

दशमान संख्या प्रणालीमधील संख्यांमध्ये असणाऱ्या अंकांच्या स्थानिक किमती एकक (1), दशक (10), शतक (100), सहस्त्र (1000), दशसहस्त्र किंवा अयुत (10000), लाख किंवा नियुत (100000), दहा लाख किंवा प्रयुत (1000000), कोटी (10000000), दशकोटी किंवा अर्बुद (100000000), अब्ज किंवा पद्म (1000000000), खर्व (10000000000), निखर्व (1000000000), महापद्म (1000000000000), शंकु (10^{13}) समुद्र किंवा जलधि (10^{14}), अंत्य (10^{15}), मध्य (10^{16}) आणि परार्ध (10^{17}) ही एक भूमिती श्रेढीच आहे.

द्विमान संख्या प्रणालीमधील bit बीटच्या स्थानिक किमती (उजवीकडून डावीकडे) 1, 2, 4, 8, 32, 64,.... ही देखील एक भूमिती श्रेढीच आहे.

जेंव्हा तीन संख्या परंपरित प्रमाणात असतात तेंव्हा मधली संख्या ही इतर दोन संख्यांची 'भूमिती मध्य' असते. कोणत्याही दोन संख्यांचा **भूमितीमध्य** म्हणजे त्या दोन संख्यांच्या गुणाकाराचे वर्गमूळ होय a आणि b या दोन संख्यांचे भूमितीमध्य $\pm\sqrt{ab}$ इतके होय.

भूमिती श्रेढी मांडण्यासाठी प्रथम पद (a) आणि सामान्य गुणोत्तर (r) यांची किंमत माहीत असावी लागते.

उदाहरण : एका भूमिती श्रेढीचे तिसरे पद 576 असून पाचवे पद 1296 आहे तर त्या श्रेढीचे आठवे पद कोणते ? आणि प्रथम पद कोणते ?

उकल : तिसरे म्हणजे t_3 , पाचवे पद म्हणजे t_5 आणि प्रथम पद म्हणजे t_1 होईल.

$t_3 = 576$ आणि $t_5 = 1296$ तर $t_8 = ?$

$t_5 = ar^{5-1} = ar^4 = 1296$ आणि $t_3 = ar^{3-1} = ar^2 = 576$

$\therefore \frac{t_5}{t_3} = \frac{ar^4}{ar^2} = \frac{1296}{576}$ $\therefore r^2 = 2.25$

$\therefore r = \pm\sqrt{2.25} = \pm 1.5$

$t_8 = ar^{8-1} = ar^7 = ar^4 \times r^3$

$t_8 = \pm 1296 \times (\pm 1.5)^3$

$t_8 = \pm 1296 \times 3.375$

$t_8 = \pm 4374$

त्या भूमिती श्रेढीचे आठवे पद $\pm$ 4374 आहे.

तसेच $t_3 = ar^2 = 576$

$\therefore a(1.5)^2 = 576$

$\therefore a = 576 \div (1.5)^2 = 576 \div 2.25$

$a = 256$

या भूमिती श्रेढीचे पहिले पद 256 आहे.

आता आपण भूमिती श्रेढीतील "n' संख्याची बेरीज कशी शोधतात ते पाहू. समजा $a, ar, ar^2, ar^3....ar^{n-1}$ या भूमिती श्रेढीतील "n' संख्याची बेरीज S_n आहे.

$\therefore a + ar + ar^2 + ar^4...+ar^{n-1} = S_n$

$\therefore a(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^{n-1}) = S_n$

दोन्ही बाजूस (1 - r) ने गुणू.

$\therefore a(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^{n-1})(1 - r) = (1-r) S_n$

$\therefore a(1 - r^n) = (1 - r) S_n$

$$S_n = a\left[\frac{1 - r^n}{1 - r}\right]$$

किंवा $S_n = a\left[\frac{(r^n - 1)}{(r - 1)}\right]$

अंकगणित श्रेढी आणि भूमिती श्रेढी यातील फरक लक्षात येण्यासाठी एक पारंपारिक कथा सांगितली जाते. ती पुढीलप्रमाणे :-

'अ' आणि 'ब' या दोन मित्रांनी एका महिन्यात असे निश्चित केले की अ ने ब ला दररोज 'एक लाख' रूपये द्यावयाचे आणि त्याच वेळी 'अ' ला 'ब' ने आदल्या दिवशी दिलेल्या रकमेच्या दुप्पट रक्कम द्यावयाची तर महिना अखेरीस कोणाजवळ जास्त रक्कम जमा होईल ?

पुढील सारणी वरून हे उदाहरण स्पष्ट होईल.

दिनांक	अ ने ब ला दिलेली रक्कम	अ ला ब कडून प्राप्त रक्कम
1)	1,00,000 रू	1 पैसा
2)	1,00,000 रू	2 पैसे
3)	1,00,000 रू	4 पैसे
4)	1,00,000 रू	8 पैसे
5)	1,00,000 रू	16 पैसे
6)	1,00,000 रू	32 पैसे
7)	1,00,000 रू	64 पैसे
8)	1,00,000 रू	128 पैसे
9)	1,00,000 रू	256 पैसे
10)	1,00,000 रू	512 पैसे
11)	1,00,000 रू	1024 पैसे
12)	1,00,000 रू	2048 पैसे
13)	1,00,000 रू	4096 पैसे

दिनांक	अ ने ब ला दिलेली रक्कम	अ ला ब कडून प्राप्त रक्कम
14)	1,00,000 रू	8192 पैसे
15)	1,00,000 रू	16384 पैसे
16)	1,00,000 रू	32768 पैसे
17)	1,00,000 रू	65536 पैसे
18)	1,00,000 रू	131072 पैसे
19)	1,00,000 रू	262144 पैसे
20)	1,00,000 रू	524288 पैसे
21)	1,00,000 रू	1048576 पैसे
22)	1,00,000 रू	2097152 पैसे
23)	1,00,000 रू	4194304 पैसे
24)	1,00,000 रू	8388608 पैसे
25)	1,00,000 रू	16777216 पैसे
26)	1,00,000 रू	33554432 पैसे
27)	1,00,000 रू	67108864 पैसे
28)	1,00,000 रू	134217728 पैसे
29)	1,00,000 रू	268435456 पैसे
30)	1,00,000 रू	536870912 पैसे

या सारणीचे काळजीपूर्वक निरीक्षण केले असता आढळून येते की, पहिल्या 28 दिवसात अ ने ब ला दिलेली रकक्कम 28,00,000 रूपये असून त्याच कालावधीमध्ये अ ला ब कडून प्राप्त झालेली रक्कम 268435455 पैसे म्हणजे 26,84,354.55रूपये आहे.

महिना अखेरीस म्हणजे 30 दिवसानंतर मात्र अ ला ब ने दिलेली एकूण रक्कम 1073741823 पैसे म्हणजेच 1,07,37,418 रूपये 23 पैसे होय.

थोडक्यात असे अनुमान काढता येईल ही, 28 दिवसांच्या फेब्रुवारी महिन्यात, ही देवाण-घेवाण झाली असती तर 'ब' ला मिळालेली रक्कम जास्त होती. परंतु इतर कोणत्याही महिन्यात मात्र महिना अखेरीला 'अ' ला प्राप्त झालेली रक्कम खूपच मोठी आहे. येथे 'ब' ला मिळणारी रक्कम अंकगणित श्रेढीने वाढत असून 'ब' ला द्यावी लागणारी रक्कम भूमिती श्रेढीने वाढत आहे.

6. त्रिकोणी संख्या, वर्ग संख्या मालिका व घन संख्या मालिका

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45,... ही एक संख्या क्रमिका आहे. या संख्या क्रमिकेतील सर्व संख्या नैसर्गिक (किंवा मोज) संख्या आहेत. ही संख्या क्रमिका अंकगणिती श्रेढी नाही किंवा भूमिती श्रेढी ही नाही. ही संख्या मालिका मांडण्यासाठी विचारात घेतलेला नियम लक्षात घेऊ.

$t_1 = 1 = 1$
$t_2 = 1 + 2 = 3$
$t_3 = 1 + 2 + 3 = 6$
$t_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
$t_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
$t_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
$t_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$
$t_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$
$t_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$

या संख्या मालिकेतील दोन क्रमागत संख्यांमधील फरक क्रमाक्रमाने वाढत गेलेला आहे. 'n' वी त्रिकोणी संख्या म्हणजे पहिल्या 'n' नैसर्गिक संख्यांची बेरीज होय.

$\therefore t_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-2) + (n-1) + n$

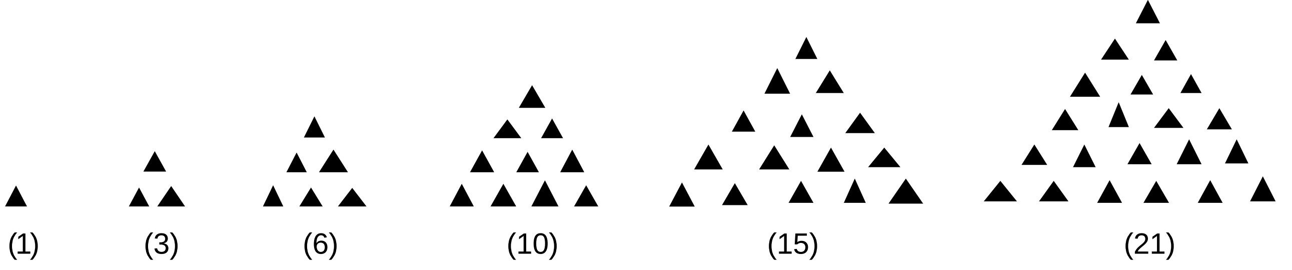
$\therefore t_n = [1 + n] + [2 + (n-1)] + [3 + (n - 2)]....$

अशा $\frac{n}{2}$ जोड्या (n सम असेल तर)

$\left[\text{किंवा } \frac{n-1}{2}\right.$ जोड्या (n विषम असेल तर) $\left. + \frac{a + k}{2}\right]$

किंवा $t_n = \frac{n}{2}(n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2}$

त्रिकोणी संख्या पुढील प्रमाणेही मांडता येतात.



त्रिकोणी संख्यांची काही वैशिष्ट्ये पुढील प्रमाणे आहेत.

1) कोणत्याही दोन क्रमवार त्रिकोणी संख्यांची बेरीज ही नेहमी पूर्ण वर्ग संख्याच असते.

उदाहरणार्थ 1 + 3 = 4, 3 + 6 = 9, 6 + 10 = 16, 10 + 15 = 25, 15 + 21 = 36, 21 + 28 = 49, 36 + 45 = 81,.... या प्रमाणे ही माहिती आपल्याला पुढील प्रमाणे देखील व्यक्त करता येईल.

त्रिकोणी संख्या	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
त्रिकोणी संख्या	-	1	3	6	10	15	21	28	36	45
दोन क्रमवार त्रिकोणी संख्यांची बेरीज	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

2) कोणत्याही त्रिकोणी संख्येच्या 'आठपटीमध्ये' 'एक' मिळविला असता विषम संख्येचा वर्ग मिळतो.

त्रिकोणी संख्या	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
त्रिकोणी संख्येची आठपट	8	24	48	80	120	168	224	288	360	440
आठपट + 1	9	25	49	81	121	169	225	289	361	441
	$= 3^2$	$= 5^2$	$= 7^2$	9^2	$=11^2$	$= 13^2$	$= 15^2$	$= 17^2$	$= 19^2$	$= 21^2$

3) दोन क्रमागत त्रिकोणी संख्यांच्या वर्गाची वजाबाकी केली तर एक घन संख्या मिळते.

त्रिकोणी संख्या	1	3	6	10	15
त्रिकोणी संख्या	-	1	3	6	10
त्रिकोणी संख्येचा वर्ग	1	9	36	100	225
त्रिकोणी संख्येचा वर्ग	-	1	9	36	100
क्रमागत त्रिकोणी संख्यांच्या वर्गाची वजाबाकी	1	8	27	64	125

4) त्रिकोणी संख्यांचे वर्ग हे नैसर्गिक संख्यांच्या घनांच्या बेरजेने व्यक्त करता येतात.

त्रिकोणी संख्या	त्रिकोणी संख्येचा वर्ग	नैसर्गिक संख्यांच्या घनांची बेरीज
1	1	1
3	9	1 + 8
6	36	1 + 8 + 27
10	100	1 + 8 + 27 + 64
15	225	1 + 8 + 27 + 64 + 125
21	441	1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216
28	784	1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343
36	1296	1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343 + 512
45	2025	1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343 + 512 + 729

5) कोणत्याही त्रिकोणी संख्येची दुप्पट ही दोन क्रमवार नैसर्गिक संख्यांच्या गुणाकाराने व्यक्त करता येते.

त्रिकोणी संख्या	त्रिकोणी संख्येची दुप्पट	दोन क्रमागत नैसर्गिक संख्यांचा गुणाकार
1	2	1 x 2
3	6	2 x 3
6	12	3 x 4
10	20	4 x 5
15	30	5 x 6
21	42	6 x 7
28	56	7 x 8
36	72	8 x 9
45	90	9 x 10
55	110	10 x 11

आता आपण त्रिकोणी संख्यांच्या बेरजेबाबत माहिती घेऊ.

$S_1 = 1 \quad = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$

$S_2 = 1 + 3 \quad = 4 = \frac{2 \times 3 \times 4}{6}$

$S_3 = 1 + 3 + 6 \quad = 10 = \frac{3 \times 4 \times 5}{6}$

$S_4 = 1 + 3 + 6 + 10 = 20 = \frac{4 \times 5 \times 6}{6}$

$S_5 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35 = \frac{5 \times 6 \times 7}{6}$

$S_6 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56 = \frac{6 \times 7 \times 8}{6}$

$S_7 = 1 + 3 + 6 + 15 + 21 + 28 = 84 = \frac{7 \times 8 \times 9}{6}$

यावरून असे म्हणता येते की पहिल्या n त्रिकोणी संख्यांची बेरीज

$$S_n = 1 + 3 + 6 + 10 + \ldots t_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

यानंतर आपण त्रिकोणी संख्यांची 'अंकमुळे' (digital roots) याबाबत काही माहिती घेऊ.

एखाद्या संख्येचे 'अंकमूळ' म्हणजे त्या संख्येतील सर्व अंकांची 'एक अंकी बेरीज' होय.

पहिल्या 40 त्रिकोणी संख्यांची अंकमूळे

त्रिकोणी संख्या	अंकांची बेरीज	अंकमूळ	त्रिकोणी संख्या	अंकांची बेरीज	अंकमूळ
1	1	1	120	3	3
3	3	3	136	10	1
6	6	6	153	9	9
10	1	1	171	9	9
15	6	6	190	10	1
21	3	3	210	3	3
28	10	1	231	6	6
36	9	9	253	10	1
45	9	9	276	15	6
55	10	1	300	3	3
66	12	3	325	10	1
78	15	6	351	9	9
91	10	1	378	18	9
105	6	6	406	10	1

त्रिकोणी संख्या	अंकांची बेरीज	अंकमूळ	त्रिकोणी संख्या	अंकांची बेरीज	अंकमूळ
435	12	3	630	9	9
465	15	6	666	18	9
496	19	1	703	10	1
528	15	6	741	12	3
561	12	3	780	15	6
595	19	1	820	10	1

यावरून आपल्याला निष्कर्ष काढता येतो की त्रिकोणी संख्येचे अंकमूळ 1,3,6 किंवा 9 असते. म्हणून आपण असे अनुमान काढू शकतो की ज्या संख्येचे अंक मूळ 2, 4, 5, 7 किंवा 8 आहे ती संख्या त्रिकोणी संख्या असणार नाही. (परंतु ज्या संख्येचे अंकमूळ 1, 3, 6 किंवा 9 आहे ती संख्या त्रिकोणी संख्या असेलच असे नाही) तसेच त्रिकोणी संख्येच्या वर्गाचे अंकमूळ 1 किंवा 9 असते आणि त्रिकोणी संख्येच्या घनाचे अंकमूळ देखील 1 किंवा 9 असते.

❋ ❋ ❋ ❋

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,.... या सर्व वर्ग संख्या आहेत. या क्रमिकेतील सर्व संख्या या नैसर्गिक संख्या आहेत. ही संख्या मालिका 'अंकगणिती श्रेढी' नाही आणि 'भूमिती श्रेढी' ही नाही.

$t_1 = 1 \times 1 = 1$

$t_2 = 4 \times 4 = 4$

$t_3 = 3 \times 3 = 9$

$t_4 = 4 \times 4 = 16$

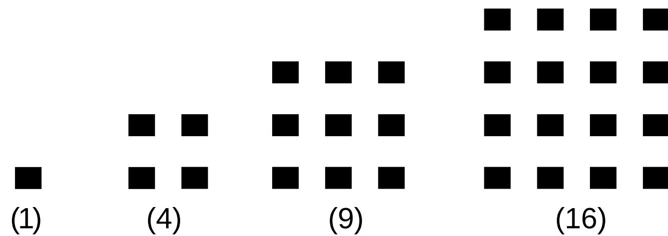
....

....

$t_n = n \times n = n^2$

} या संख्या मालिकेतील दोन क्रमागत संख्यांमधील फरक क्रमाक्रमाने वाढत गेलेले आहे. कोणत्याही दोन क्रमागत वर्ग संख्यामधील फरक ही एक **'विषम संख्या'** असते.

दोन क्रमागत वर्ग संख्यांमधील फरक हा त्या दोन वर्ग संख्यांच्या वर्गमुळांच्या बेरजेइतका असतो. वर्ग संख्या पुढीलप्रमाणे मांडता येतात.



(1) (4) (9) (16)

किंवा

(1) (4) (9) (16)

वर्ग संख्यांची काही वैशिष्ट्ये पुढील प्रमाणे आहेत.

1) दोन क्रमवार त्रिकोणी संख्यांच्या बेरजेने वर्गसंख्या मिळते.

2) दोन क्रमागत वर्गसंख्यामधील फरक हा एक विषम संख्याच असतो.

3) तीन क्रमवार वर्ग संख्यांपैकी मधली वर्ग संख्या ही इतर दोन वर्ग संख्यांच्या सरासरी पेक्षा 1 ने कमी असते.

(t_n, t_{n+1} आणि t_{n+2} या तीन क्रमवार वर्ग संख्या असतील तर

$$t_{n+1} = \left[\frac{(t_n + t_{n+2})}{2}\right] - 1$$

4) एक पासून पुढे क्रमवार विषम संख्याची बेरीज केली असता प्रत्येक बेरीज ही पूर्ण वर्ग संख्या असते.

$1 + 3 + 5 + 7 + ...t_n = n^2$

(येथे $t_n = 2n - 1$ आणि $n \in N$)

5) t_n आणि t_{n+1} या दोन क्रमवार वर्ग संख्या असतील तर

$t_{n+1} - t_n = 2n + 1 = \sqrt{t_{n+1}} + \sqrt{t_n}$

6) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + ...n^2 = \frac{n (n + 1) (2n + 1)}{6}$

7) दोन क्रमागत वर्ग संख्यांची बेरीज ही नेहमी विषम संख्याच असते आणि चार क्रमागत वर्ग संख्यांची बेरीज नेहमी सम संख्याच असते.

8) कोणत्याही चार क्रमागत नैसर्गिक संख्यांच्या गुणाकारात एक मिळविला असता वर्ग संख्या मिळते.

$n (n + 1) (n + 2) (n + 3) = m^2 \quad (m, n \in N)$

9) कोणत्याही चार क्रमागत विषम संख्यांच्या गुणाकारात 16 मिळविले असता वर्ग संख्या मिळते.

10) कोणत्याही चार क्रमागत सम संख्यांच्या गुणाकारात 16 मिळविले असता वर्ग संख्या मिळते.

11) वर्ग संख्येचे अंकमूळ 1, 4, 7 किंवा 9 असते. (म्हणजेच ज्या संख्येचे अंकमूळ 2, 3, 5, 6 किंवा 8 असते. ती संख्या वर्ग संख्या नसते.)

12) अंक मूळ 1,4, 7 किंवा 9 असणारी प्रत्येक संख्या वर्ग संख्या असतेच असे नाही.

समजा x ही संख्या दोनदा लिहून बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार करून अनुक्रमे A, B, C आणि D या चार संख्या मिळवा.

(A = x + x, B = x - x, C = x X x आणि D = x ÷ x)

A, B, C आणि D या चार संख्यांच्या बेरजेचे वर्गमूळ काढून त्यातून 1 वजा केल्यास x हीच संख्या मिळते.

$\sqrt{A + B + C + D} - 1 = x$

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343,.... या सर्व घन संख्या आहेत. या क्रमिकेतील सर्व संख्या या पूर्णांक संख्या आहेत. ही क्रमिका (संख्या मालिका) अंकगणित श्रेढी नाही आणि भूमिती श्रेढी नाही.

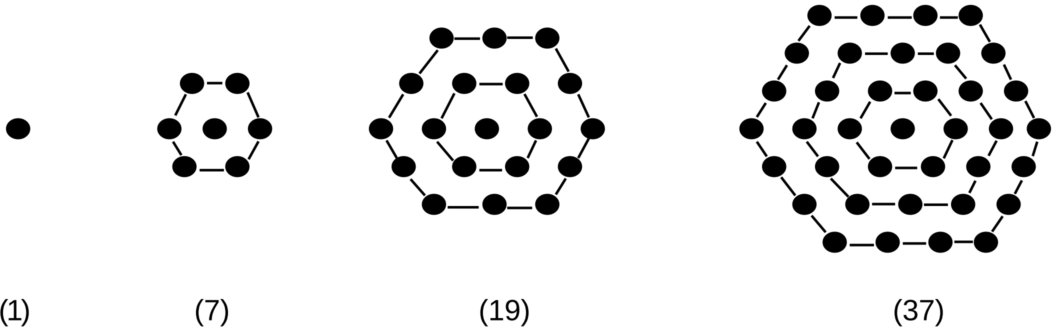
$t_1 = 1 \times 1 \times 1 = 1$
$t_2 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
$t_3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$
$t_4 = 4 \times 4 \times 4 = 64$
$t_5 = 5 \times 5 \times 5 = 125$
....
....
$t_n = n \times n \times n = n^3$

या मालिकेतील संख्या क्रमाक्रमाने वाढत गेलेल्या आहेत. कोणत्याही दोन क्रमागत घन संख्यांमधील फरक ही एक विषम संख्या असते.

घन संख्यांची काही वैशिष्ट्ये पुढील प्रमाणे आहेत.

1) $t_2 - t_1 = 8 - 1 = 7$
2) $t_3 - t_2 = 27 - 8 = 19$
4) $t_4 - t_3 = 64 - 27 = 37$
5) $t_5 - t_4 = 125 - 64 = 61$
6) $t_6 - t_5 = 216 - 125 = 91$
7) $t_7 - t_6 = 343 - 216 = 127$

या प्रमाणे दोन क्रमागत घन संख्यांच्या वजाबाकीने आपल्याला 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127,....ही एक क्रमिका मिळते. या क्रमिकेची मांडणी पुढील प्रमाणे करता येते.



(1) (7) (19) (37)

सामान्य पद $3n^2 + 3n + 1 \quad (n \in W)$

$= 3n(n + 1) + 1$

1	=	1
3 + 5	=	8
7 + 9 + 11	=	27
13 + 15 + 17 + 19	=	64
21 + 23 + 25 + 27 + 29	=	125
31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41	=	216
43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55	=	343

घन संख्यांची अंकमूळे अनुक्रमे 1, 8, 9, 1, 8, 9, 1, 8, 9, 1, 8, 9, 1, 8, 9,.... **या प्रमाणे आहेत. म्हणजेच प्रत्येक घन संख्येचे अंकमूळ** 1, 8 **किंवा** 9 **असते.** (**मात्र अंकमूळ** 1, 8 **किंवा** 9 **असणारी प्रत्येक संख्या घन संख्या असेलच असे नाही.**) **ज्या संख्येचे अंकमूळ** 2, 3, 4, 5, 6, **किंवा** 7 **असते ती संख्या घन संख्या नसते.**

$1 + 8 + 27 + ...n^3 = [1 + 2 + 3 + ...n]^2 \quad n \in N$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ...n^3 = \frac{n^2 (n + 1)^2}{4}$$

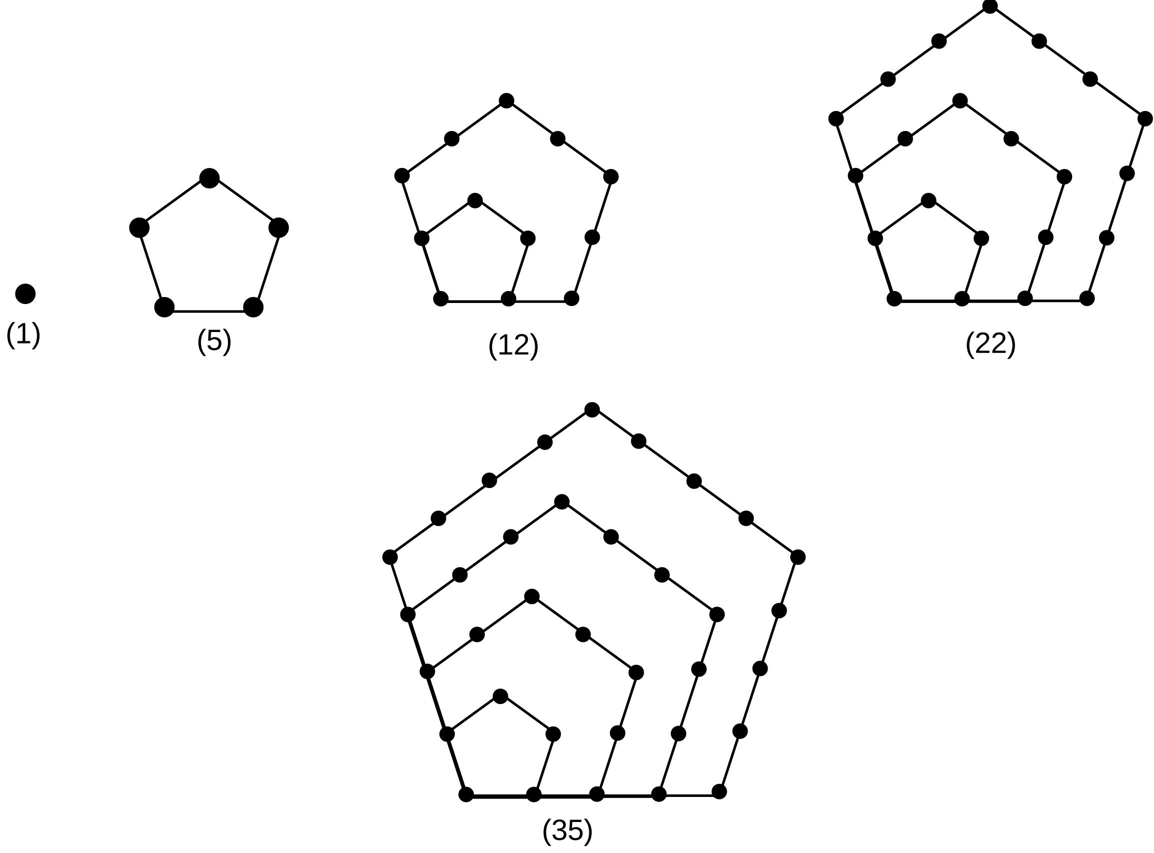
दोन क्रमागत घन संख्यांची बेरीज किंवा वजाबाकी ही नेहमी विषम संख्याच असते.

कोणत्याही तीन क्रमागत संख्यांच्या गुणाकारात मधली संख्या मिळवा म्हणजे घन संख्या मिळेल.

$n (n + 1) (n + 2) + (n + 1) = m^3 = (n + 1)^3$

❑ ❑ ❑

7. पंचकोनीय संख्या, षट्कोनीय संख्या



येथे 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70,....ही एक क्रमिका मिळते. या क्रमिकेचे सर्वसामान्य पद = $t_n = \frac{n(3n-1)}{2}$

या क्रमिकेतील प्रत्येक घटकाला पंचकोनीय संख्या असे म्हणतात.

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, ... या क्रमिकेतील दोन क्रमागत संख्यांमधील फरकाने 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25....ही एक अंकगणिती श्रेढी मिळते.

1 = 1
5 = 1 + 4
12 = 3 + 9
22 = 6 + 16
35 = 10 + 25
51 = 15 + 36
70 = 21 + 49
....
....

tn $= [(1 + 2 + 3 + ... (n - 1)] + n^2$

$= \left[\frac{(n - 1) \times n}{2}\right] + n^2$

1 $= 1 = \frac{1}{2} [1 \times 1 \times 2]$

1 + 5 $= 6 = \frac{1}{2} [2 \times 2 \times 3]$

1 + 5 + 12 $= 18 = \frac{1}{2} [3 \times 3 \times 4]$

1 + 5 + 12 + 22 $= 40 = \frac{1}{2} [4 \times 4 \times 5]$

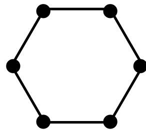
1 + 5 + 12 + 22 + 35 $= 75 = \frac{1}{2} [5 \times 5 \times 6]$

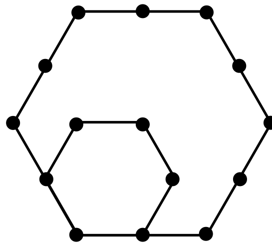
1 + 5 + 12 + 22 + 35 +....tn $= \frac{1}{2} [n \times n \times (n + 1)]$

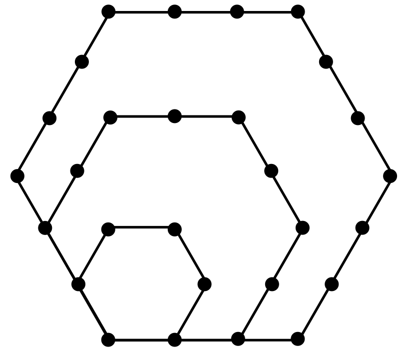
   

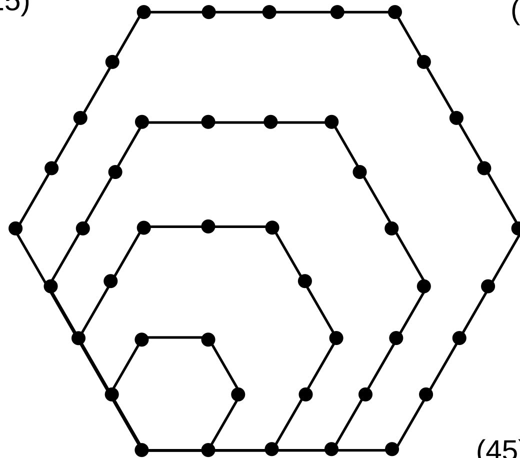
षट्कोनीय संख्या


(1)


(6)


(15)


(28)


(45)

1 , 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120,.... ही एक संख्या क्रमिका आहे. या क्रमिकेला षट्कोनीय संख्यांची क्रमिका असे म्हणतात.

t_1 = 1 = 1 x (2 - 1)

t_2 = 6 = 2 x (4 - 1)

t_3 = 15 = 3 x (6 - 1)

t_4 = 28 = 4 x (8 - 1)

t_5 = 45 = 5 x (10 - 1)

t_6 = 66 = 6 x (12 - 1)

t_n = n(2n - 1) = n x (2 x n-1)

तसेच

$$1 = 1 = \frac{1 \times (1 + 1)(4 - 1)}{6}$$

$$1 + 6 = 7 = \frac{2 \times (2 + 1)(8 - 1)}{6}$$

$$1 + 6 + 15 = 22 = \frac{3 \times (3 + 1)(12 - 1)}{6}$$

$$1 + 6 + 15 + 28 = 50 = \frac{4 \times (4 + 1)(16 - 1)}{6}$$

$$1 + 6 + 15 + 28 + 45 = 95 = \frac{5 \times (5 + 1)(20 - 1)}{6}$$

$$1 + 6 + 15 + 28 + 45 + \dots t_n = \frac{n \times (n + 1)(4n - 1)}{6}$$

आपल्याला माहीत आहे की, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210,....या सर्व त्रिकोणी संख्या आहेत आणि 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, 231,....या सर्व षटकोनीय संख्या आहेत यावरून आपल्याला असे अनुमान काढता येते की प्रत्येक षट्कोनीय संख्या हि त्रिकोणीय संख्या असतेच.

1, 6, 15, 28, 45, 91, 120, 153,...या क्रमिकेतील दोन क्रमागत घटकांच्या फरकाने 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33,... ही एक अंकगणिती श्रेढी प्राप्त होते.

8. फिबोनकी संख्या

t_1	=	1	=	1
t_2	=	1 +1	=	2
t_3	=	1 + 2	=	3
t_4	=	2 + 3	=	5
t_5	=	3 + 5	=	8
t_6	=	5 + 8	=	13
t_7	=	8 + 13	=	21
t_8	=	13 + 21	=	34
t_9	=	21 + 34	=	55
t_{10}	=	34 + 55	=	89
t_{11}	=	55 + 89	=	144

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597,....

ही एक आश्चर्यकारक संख्या क्रमिका आहे. या संख्या क्रमिकेतील संख्यांना **'फिबोनकी संख्या'** असे म्हणतात. या संख्या इसवीसन 1202 मध्ये प्रकाशित करण्यात आल्या. या संख्या मालिकेमध्ये अनेक आश्चर्यकारक गुणविशेष आढळून आल्याने ही संख्या मालिका अनेक गणिततज्ञांचे आकर्षण झालेली आहे. या संख्या मालिकेच्या संदर्भात आत्तापर्यंत अनेक शोध निबंध वेगवेगळ्या गणित अधिवेशनांमध्ये सादर करण्यात आलेले आहेत.

1) या संख्या मालिकेतील काही गमती आपण समजावून घेणार आहोत.

i) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,....

1 x 3 = 3 आणि 1 x 2 = 2 ; $|3 - 2| = 1$

ii) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,.....

1 x 5 = 5 आणि 2 x 3 = 6 ; $|5 - 6| = 1$

iii) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.....

2 x 8 = 16 आणि 3 x 5 = 15 ; $|16 - 15| = 1$

iv) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,....

$3 \times 13 = 39$ आणि $5 \times 8 = 40$; $|39 - 40| = 1$

v) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,....

$5 \times 21 = 105$ आणि $8 \times 13 = 104$; $|105 - 104| = 1$

vi) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,....

$8 \times 34 = 272$ आणि $13 \times 21 = 273$; $|272 - 273| = 1$

येथे आपणास असे म्हणता येते की,

जर $t_n \times t_{n+3} = x$ आणि $t_{n+1} \times t_{n+2} = y$ **तर** $|x - y| = 1$

2) [1, 1, 2] [3, 5, 8] [13, 21, 34] [55, 89, 144,....]

i)	$1 \times 2 = 2$,	$1^2 = 1$	आणि	$2 = 1 + 1$
ii)	$3 \times 8 = 24$,	$5^2 = 25$	आणि	$24 = 25 - 1$
iii)	$13 \times 34 = 442$,	$21^2 = 441$	आणि	$442 = 441 + 1$
iv)	$55 \times 144 = 7920$,	$89^2 = 7921$	आणि	$7920 = 7921 - 1$
v)	$233 \times 610, = 142130$	$377^2 = 142129$	आणि	$142130 = 142129 + 1$

3) 1, [1, 2, 3] [5, 8, 13] [21, 34, 55] [89, 44, 233,...]

i)	$1 \times 3 = 3$,	$2^2 = 4$	आणि	$3 = 4 - 1$
ii)	$5 \times 13 = 65$,	$8^2 = 64$	आणि	$65 = 64 + 1$
iii)	$21 \times 55 = 1155$,	$34^2 = 1156$	आणि	$1155 = 1156 - 1$
iv)	$89 \times 233 = 20737$,	$144^2 = 20736$	आणि	$20737 = 20736 + 1$

4) 1, 1, [2, 3, 5,] [8, 13, 21,] [34, 55, 89,] [144, 233, 373,....]

i)	$2 \times 5 = 10$,	$3^2 = 9$	आणि $10 = 9 + 1$
ii)	$8 \times 21 = 168$,	$13^2 = 169$	आणि $168 = 169 - 1$
iii)	$34 \times 89 = 3026$	$55^2 = 3025$	आणि $3026 = 3025 + 1$
iv)	$144 \times 377 = 54288$,	$233^2 = 54289$	आणि $54288 = 54289 - 1$

येथे आपणास असे आढळून येते की, तीन क्रमागत फिबोनकी संख्यांपैकी मधल्या संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या गुणाकारापेक्षा 1 ने कमी किंवा 1 ने जास्त असतो.

(तीन संख्या परंपरित प्रमाणात किंवा भूमिती श्रेढीमध्ये असतील तर मधल्या संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या गुणाकाराइतका असतो.)

$\therefore (tn)^2 = (t_{n-1}) \times (t_{n+1}) + 1$ किंवा - 1

5) 1, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,....

या मालिकेतील दोन क्रमागत संख्यांची बेरीज क्रमाक्रमाने केली असता 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,....ही संख्या मालिका मिळते. म्हणजेच दोन क्रमागत फिबोनकी संख्यांच्या बेरजेने फिबोनकी संख्याच मिळते.

6) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,....

या क्रमिकेतील दोन क्रमागत घटकांमधील फरक क्रमाक्रमाने शोधला असता 0, 1, 2, 3, 5, 13, 21, 34,.....ही क्रमिका मिळते. म्हणजेच दोन क्रमागत फिबोनकी संख्यांमधील फरक हा एक फिबोनकी संख्याच असतो. जर $n > 2$ असेल आणि ($n \in N$)

तर $t_{n-1} + t_{n-2} = t_n = t_{n+2} - t_{n+1}$

1 + 1 = 2 = 5 - 3

1 + 2 = 3 = 8 - 5

2 + 3 = 5 = 13 - 8

3 + 5 = 8 = 21 - 13

5 + 8 = 13 = 34 - 21

8 + 13 = 21 = 55 - 34

13 + 21 = 34 = 89 - 55

21 + 34 = 55 = 144 - 89

34 + 55 = 89 = 233 - 144

7) पुढील सारणीचे निरीक्षण करा

फिबोनकी संख्येची दुप्पट	फिबोनकी संख्या	फरक
$2 \times t_n$	t_{n+1}	$2t_n - t_{n+1}$
1 x 2 = 2	1	1
1 x 2 = 2	2	0
2 x 2 = 4	3	1
3 x 2 = 6	5	1
5 x 2 = 10	8	2
8 x 2 = 16	13	3
13 x 2 = 26	21	5
21 x 2 = 42	34	8

फिबोनकी संख्येची दुप्पट	फिबोनकी संख्या	फरक
34 x 2 = 68	55	13
55 x 2 = 110	89	21
89 x 2 = 178	144	34
144 x 2 = 288	233	55
233 x 2 = 466	377	89
377 x 2 = 754	610	144
610 x 2 = 1220	987	233
987 x 2 = 1974	1597	377

या सारणीचे काळजीपूर्वक निरीक्षण केले असता असे आढळून येते की, कोणत्याही फिबोनकी संख्येच्या दुप्पटी मधून त्या पुढील क्रमागत फिबोनकी संख्या वजा केली असता उरणारी बाकी ही फिबोनकी संख्याच असते. (अपवाद t_2)

8) पुढील सारणीचे काळजीपूर्वक निरीक्षण करा.

फिबोनकी संख्या t_{n+1}	फिबोनकी संख्या tn	$t_{n+1} \div t_n$
1	1	1
2	1	2
3	2	1.5
5	3	1.66666666666
8	5	1. 6
13	8	1.625
21	13	1.6153846
34	21	1.6190476
55	34	1.6176471
89	55	1.6181818
144	89	1.6179775
233	144	1.6180556
377	233	1.6180258
610	377	1.6180371
987	610	1.6180328
1597	987	1.6180344
2584	1597	1.6180338

ग्रीक वास्तूशास्त्रामध्ये 1.61805....या अपरिमेय संख्येला सौंदर्यशास्त्राच्या दृष्टीने विशेष महत्व आहे. ही $x^2 = x + 1$ या वर्ग समीकरणाची धन उकल आहे. सामान्यतः या अपरिमेय संख्येची किंमत $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ या संख्येला जवळची आहे, आणि दोन क्रमागत फिबोनकी संख्यांच्या गुणोत्तराची किंमत सुमारे 1.6180 ला खूपच जवळची आहे. म्हणून या गुणोत्तर किमतीला 'सुवर्ण गुणोत्तर' असे म्हणतात.

9) कोणत्याही दोन क्रमागत फिबोनकी संख्यांचा म.सा.वि. 1 असतो आणि कोणत्याही दोन क्रमागत फिबोनकी संख्यांचा ल.सा.वि. हा त्यांच्या गुणाकारा इतका असतो. म्हणजेच दोन क्रमागत फिबोनकी संख्या या सहमूळसंख्या (co-prime numbers) असतात.

10) 1, 1, 4, 9, 25, 64, 169, 441, 1156, 3025, 7921, 20736, 54289, 142129,.... ही क्रमिका म्हणजे फिबोनकी संख्यांचा वर्ग संख्यांची संख्या मालिका होय.

$1^2 \times 1^2 = 1 \times 2$

$1^2 + 1^2 + 2^2 = 2 \times 3$

$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \times 5$

$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 5 \times 8$

$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 8 \times 13$

$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 = 13 \times 21$

$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2 = 21 \times 34$

$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2 + 34^2 = 34 \times 55$

$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 .... Tn^2 = T_n \times T_{n+1}$

11) फिबोनकी संख्या मालिकेतील 1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, 610, 1597, 4181, 10946, 28657....या सर्व विषम क्रमांकाच्या फिबोनकी संख्या आहेत.

1 = 1

1 + 2 = 3

1 + 2 + 5 = 8

1 + 2 + 5 + 13 = 21

1 + 2 + 5 + 13 + 34 = 55

1 + 2 + 5 + 13 + 34 + 89 = 144

1 + 2 + 5 + 13 + 34 + 89 + 233 = 377

1 + 2 + 5 + 13 + 34 + 89 + 233 + 610 = 987

....

1, 3, 21, 55, 144, 377, 987,....या सर्व सम क्रमांकांच्या फिबोनकी संख्या आहेत.

12) पुढील सारणीचे काळजीपूर्वक निरीक्षण करा.

फिबोनकी संख्येचा घन $(T_{n+2})^3$	फिबोनकी संख्येचा घन $(T_{n+1})^3$	फिबोनकी संख्येचा घन $(Tn)^3$	$(T_{n+2})^3 + (T_{n+1})^3 - (Tn)^3$	
$(2)^3 = 8$	$(1)^3 = 1$	$(1)^3 = 1$	8 + 1 - 1	8
$(3)^3 = 27$	$(2)^3 = 8$	$(1)^3 = 1$	27 + 8 - 1	34
$(5)^3 = 125$	$(3)^3 = 27$	$(2)^3 = 8$	125 + 27 - 8	144
$(8)^3 = 512$	$(5)^3 = 125$	$(3)^3 = 27$	512 + 125 - 27	610
$(13)^3 = 2197$	$(8)^3 = 512$	$(5)^3 = 125$	2197 + 512 - 125	2584
$(21)^3 = 9261$	$(13)^3 = 2197$	$(8)^3 = 512$	9261 + 2197 - 512	10946

या सारणी वरून आपल्याला असे अनुमान काढता येते की, तीन क्रमागत फिबोनकी संख्यापैकी सर्वात लहान संख्येचा घन हा इतर दोन संख्यांच्या घनांच्या बेरजेतून वजा केल्यानंतर उरणारी बाकी ही एक फिबोनकी संख्याच असते.

9. स्वयंभू संख्यांच्या मालिका आणि त्यांचे संगम

'स्वयंभू संख्या' म्हणजे काय ? हे समजावून घेण्यासाठी आपल्याला **'जनक संख्या'** आणि **'निर्मित संख्या'** या दोन संकल्पना समजावून घेणे आवश्यक आहे.

कोणतीही नैसर्गिक संख्या ही 'जनक संख्या' असू शकते. आणि कोणत्याही जनक संख्येमध्ये त्या संख्येतील अंकांची बेरीज मिळविली असता 'निर्मित संख्या' प्राप्त होते. ही संकल्पना आपण प्रत्यक्ष उदाहरणांच्या मदतीने समजावून घेऊ.

उदाहरण 1 : 47 ही एक नैसर्गिक संख्या आहे. 4 + 7 = 11 ही त्या संख्येतील अंकांची बेरीज 47 + (4 + 7) = 47 + 11 = 58

येथे 47 ही जनक संख्या असून त्या जनक संख्येतील अंकांची बेरीज 11 आहे. (जनक संख्या + तिच्या अंकांची बेरीज = निर्मित संख्या) 47 मध्ये 11 मिळविले असता 58 ही संख्या मिळते. म्हणून 47 ही जनक संख्या असेल तर 58 ही निर्मित संख्या होय.

उदाहरण 2 : 58 ही जनक संख्या असेल तर 5 + 8 = 13 ही तिच्यातील अंकांची बेरीज आणि 58 + (5 + 8) = 58 + 13 = 71 म्हणून 58 ही जनक संख्या असेल तर 71 ही निर्मित संख्या होय.

या दोन उदाहणांवरून आपल्याला असे अनुमान काढता येते की,

जनक संख्या < निर्मित संख्या म्हणजेच निर्मित संख्या ही जनक संख्येपेक्षा मोठी असते. 71 ची जनक संख्या 47 आहे. आता आपण 47 या संख्येची जनक संख्या शोधण्याचा प्रयत्न करू. 47 ची जनक संख्या निश्चितपणे 47 पेक्षा लहान आहे. 47 पेक्षा लहान असणाऱ्या संख्या 46, 45, 44, 43, 42, 41, 40, 39, 38, 38, 36, 35,...., या आहेत. या जनक संख्या असतील तर त्यांच्या पासून अनुक्रमे 56, 54, 52, 50, 48, 46, 44, 51,49, 47, 45, 43,..., 2 या निर्मित संख्या प्राप्त होतील.

46 → 46 + 10 = 56
45 → 45 + 9 = 54
44 → 44 + 8 = 52
43 → 43 + 7 = 50
42 → 42 + 6 = 48
41 → 41 + 5 = 46
40 → 40 + 4 = 44

} येथे आपण 46 पासून 41 पर्यंतच्या जनक संख्यांनी तयार होणाऱ्या निर्मित संख्या शोधलेल्या आहेत.

आता आपण 39 पासून 35 पर्यंतच्या जनक संख्यांमुळे कोणत्या निर्मित संख्या प्राप्त होतात ते पाहू. {

39 → 39 + 12 = 51
38 → 38 + 11 = 49
37 → 37 + 10 = 47
36 → 36 + 9 = 45
35 → 35 + 8 = 43

या आकडेमोडीवरून असे म्हणता येते की, जेंव्हा 37 ही जनक संख्या असेल तर 37 + (3 + 7) = 37 + 10 = 47 म्हणजे 47 ही निर्मित संख्या होय.

37 = 32 + (3 + 2) = 32 + 5 म्हणजे 32 ही जनक संख्या असेल तर 37 ही निर्मित संख्या होय.

तसेच,

32 = 25 + (2 + 5) = 25 + 7 म्हणजेच 25 ही जनक संख्या असेल तर 32 ही निर्मित संख्या होय. तसेच,

25 = 17 + (1 + 7) = 17 + 8

म्हणजेच 17 ही जनक संख्या असेल तर 25 ही निर्मित संख्या होय. या प्रमाणे आपण प्रत्येक निर्मित संख्येची जनक संख्या शोधण्याचा प्रयत्न केला तर आपल्याला एक संख्या मालिका मिळते. या साठी पुढील सारणीचे निरीक्षण करा.

जनक संख्या	**निर्मित संख्या**	**जनक संख्या**	**निर्मित संख्या**
5	5 + 5 = 10	10	10 + 1 + 10 = 11
11	11 + 1 + 1 = 13	13	13 + 1 + 3 = 17
17	17 + 1 + 7 = 25	25	25+ 2 + 5 + = 32
32	32 + 3 + 2 = 37	37	37 + 3 + 7 = 47
47	47 + 4 + 7 = 58	58	58 + 5 + 8 = 71

5, 10, 11, 13, 17, 25, 32, 37, 47, 58, 71, 79, 95,....ही एक निर्मित संख्यांची संख्या मालिका (क्रमिका) आहे.

याप्रमाणे आपण **'निर्मित संख्यांच्या'** आणखी काही क्रमिका पाहू.

जनक संख्या	**निर्मित संख्यांची क्रमिका**
1	2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, 49, 62, 70, 77, 91,....
3	6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, 51, 57, 69, 84, 96,....
5	10, 11, 13, 17, 25, 32, 37, 47, 58, 71, 79, 95,....
7	14, 19, 29, 40, 44, 52, 59, 73, 83, 94,....
9	18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99,....

येथे आपणास असे लक्षात येते की 1, 3, 5, 7 आणि 9 या एक अंकी संख्या अशा आहेत की, त्यांना कोणतीही जनक संख्या नाही. 1, 3, 5, 7 आणि 9 या जनक संख्यांना **'स्वयंभू संख्या'** असे म्हणतात. यावरून आपण स्वयंभू संख्येची व्याख्या तयार करू शकतो.

ज्या नैसर्गिक संख्येला कोणतीही जनक संख्या नसते त्या संख्येला स्वयंभू संख्या असे म्हणतात.

या नंतर आपण दोन अंकी स्वयंभू संख्या कोणत्या आहेत ते शोधू.

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, आणि 19 या दोन अंकी **'निर्मित संख्या'** अनुक्रमे 5, 10, 6, 11, 7, 12, 8, 13, 9 आणि 14 या 'जनक संख्यापासून तयार झालेल्या आहेत. तसेच 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 आणि 19 या 'जनक संख्या असतील तर अनुक्रमे 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27 आणि 29 या निर्मित संख्या प्राप्त होतील. यावरून आपल्याला असे म्हणता येते की **20 या नैसर्गिक संख्येला कोणतीही जनक संख्या नाही**. म्हणजेच 20 ही सर्वात लहान दोन अंकी स्वयंभू संख्या आहे.

20, 31, 42, 53, 64, 75, 86 आणि 97 या दोन अंकी स्वयंभू संख्या आहेत. आपण 1, 3, 5, 7 आणि 9 या एकअंकी स्वयंभू संख्यांच्या **निर्मित संख्यांच्या** मालिका पाहिलेल्या आहेत. आता आपण 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86 आणि 97 या दोन अंकी स्वयंभू संख्यांच्या मालिका पाहू.

स्वयंभू संख्या	स्वयंभू संख्येची क्रमिका / निर्मित संख्यांची मालिका
20	22, 36, 34, 41, 46, 56, 67, 80, 88, 104, 109, 119, 130, 134, 142, 149, 163,....
31	35, 43, 50, 55, 65, 76, 89, 106, 113, 118, 128, 139, 152, 160, 167, 181,....
42	48, 60, 66, 78, 93, 105, 111, 114, 120, 123, 129, 141, 147, 159, 174,...
53	61, 68, 82, 92, 103, 107, 115, 122, 127, 137, 148, 161, 169, 185, 199,....
64	74, 85, 98, 115, 122, 127, 137, 148, 161, 169, 185, 199,....
75	87, 102, 105, 111, 114, 120, 123, 129, 141, 147, 159, 174,....
86	100, 101, 103, 107, 115, 122, 127, 137, 148, 161, 169, 185, 199,....
97	113, 118, 128, 139, 152, 160, 167, 181, 191, 202, 206, 214, 221,....

या सारणीचे काळजीपूर्वक निरीक्षण केले असता आपल्याला असे आढळून येते की, (i) 53 आणि 64 या दोन स्वयंभू संख्या पासून निर्मित संख्यांच्या ज्या क्रमिका तयार झालेल्या आहेत. त्यामध्ये 115, 122, 127, 137, 148, 161, 169,....या सामाईक आहेत तसेच या सर्व संख्या 86 या स्वयंभू संख्येपासून तयार होणाऱ्या निर्मित संख्यांच्या क्रमिकेतही आहेत. ii) 42 आणि 75 या दोन स्वयंभू संख्यांच्या पासून ज्या निर्मित संख्यांच्या क्रमिका तयार झालेल्या आहेत त्या दोन्हीही संख्या मालिकांमध्ये 105, 111, 114, 120, 123, 129, 141, 147, 159, 174,.... या सामाईक संख्या आहेत.

वरील सर्व विवेचनावरून आपल्याला असे म्हणता येते की,

i) 53 आणि 86 या स्वयंभू संख्यांपासून तयार होणाऱ्या क्रमिकांचा संगम 103 या संख्येपाशी होतो.

ii) 53 आणि 64 या स्वयंभू संख्यापासून तयार होणाऱ्या क्रमिकांचा संगम 115 या संख्येपाशी होतो.

iii) 64 आणि 86 या स्वयंभू संख्यांपासून तयार होणाऱ्या क्रमिकांचा संगम 115 या संख्येपाशी होतो.

iv) 42 आणि 75 या स्वयंभू संख्यापांसून तयार होणाऱ्या क्रमिकांचा संगम 105 या संख्येपाशी होतो.

v) 31 आणि 97 या स्वयंभू संख्यांपासून तयार होणाऱ्या क्रमिकांचा संगम 113 या संख्येपाशी होतो.

vi) 1 आणि 86 या स्वयंभू संख्यांपासून तयार होणाऱ्या क्रमिकांचा संगम 101 या संख्येपाशी होतो.

vii) 3 आणि 75 या स्वयंभू संख्यांपासून तयार होणाऱ्या क्रमिकांचा संगम 111 या संख्येपाशी होईल आणि 3 आणि 42 या संख्यांपासून तयार होणाऱ्या क्रमिकांचा संगमही 111 या संख्येपाशीच होईल.

91 आणि 100 या दोन जनक संख्या असतील तर 91 + (9 + 1) = 101 आणि 100 + (1 + 0 + 0) = 101. म्हणजेच 101 ह्या निर्मित संख्येला 91 आणि 100 या दोन जनक संख्या आहेत. या प्रमाणे ज्या निर्मित संख्यांना दोन जनक संख्या आहेत. अशा संख्या कोणत्या ते पाहू.

जनक संख्या	निर्मित संख्या
91 व 100	101
92 व 101	103
93 व 102	105
94 व 103	107
95 व 104	109
96 व 105	111
97 व 106	113
98 व 107	115
99 व 108	117

101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, व 117 या 'संगम संख्या' आहेत. दोन किंवा अधिक स्वयंभू संख्यांपासून तयार होणाऱ्या क्रमिकांचा संगम ज्या संख्येपाशी होते त्या संख्येला संगम संख्या असे म्हणतात. संगम संख्यांना दोन किंवा अधिक जनक संख्या असतात.

100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107 आणि 109 या संख्यांच्या जनक संख्या अनुक्रमे 86, 91, 87, 92, 88, 93, 89, 94, आणि 104 या आहेत. परंतु 108, आणि 110 या स्वयंभू संख्या आहेत. याप्रमाणे आपण 3 अंकी स्वयंभू संख्या शोधू शकतो. 108, 110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187,.... या स्वयंभू संख्या आहेत.

स्वयंभू संख्यांच्या मालिकांचे मिलन निरनिराळ्या 'संगम संख्यांपाशी' होत असते. त्यामुळे स्वयंभू संख्यांपासून तयार होणाऱ्या क्रमिकांचे तीन गट तयार करता येतील.

1) ज्या स्वयंभू संख्यांना 3 ने भाग जात नाही, त्या स्वयंभू संख्येपासून तयार होणाऱ्या निर्मित संख्यांनाही 3 ने निःशेष भाग जात नाही.
2) ज्या स्वयंभू संख्येला 3 ने भाग जातो. परंतु 9 ने भाग जात नाही. त्या स्वयंभू संख्येपासून तयार होणाऱ्या निर्मित संख्यांच्या क्रमिकेतील कोणत्याही संख्येला 3 ने भाग जातो परंतु 9 ने भाग जात नाही.
3) 9 ने निःशेष भाग जाणाऱ्या प्रत्येक जनक संख्येपासून तयार होणाऱ्या निर्मित संख्येलाही 9 ने निःशेष भाग जातो.

10. हर्षद संख्यांच्या मालिका

ज्या संख्येला तिच्यातील अंकांच्या बेरजेने निःशेष भाग जातो, त्या संख्येला हर्षद संख्या असे म्हणतात.

1, 10, 1000, 10000, 100000, 1000000, 10000000,.....ही एक भूमिती श्रेढी आहे. या श्रेढीतील प्रत्येक संख्या ही त्या संख्येच्या आधी असणाऱ्या संख्येच्या दहापट आहे. या क्रमिकेतील प्रत्येक संख्येतील अंकांची बेरीज 1 आहे, आणि प्रत्येक संख्या ही हर्षद संख्या आहे.

आता आपण 2 ने निःशेष भाग जाणाऱ्या हर्षद संख्या पाहू.

2, 20, 200, 1010, 1100, 2000, 10010, 10100, 11000, 20000,.....या क्रमिकेतील प्रत्येक संख्येला 2 ने भाग निःशेष भाग जातो आणि या क्रमिकेतील प्रत्येक संख्येतील अंकांची बेरीज 2 आहे. म्हणजे या क्रमिकेतील सर्व संख्या हर्षद संख्या आहेत.

तसेच 3, 12, 21, 30, 102, 111, 120, 201, 210, 300, 1002, 1011, 1020, 1101, 1110, 1200, 2001, 2010, 2100, 3000,....या संख्या क्रमिकेतील सर्व संख्या या हर्षद संख्या आहेत.

काही हर्षद संख्यांच्या मालिका पुढील प्रमाणे

विभाजक	हर्षद संख्यांची मालिका
1	10, 100, 1,000, 10000, 100000, 1000000, 1,0000000, 1,00000000, 1000000000,....
2	20, 110, 200, 1010, 1100, 2000, 10010, 10100, 11000, 20000, 100010,....
3	12, 21, 30, 102, 111, 120, 201, 210, 300, 1002, 1011, 1020,....
4	40, 112, 220, 400, 1012, 1120, 2020, 2200, 3100, 4000, 10012,....
5	50, 140, 230, 320, 410, 500, 1040, 1130, 1220, 1310, 1400,....
6	24, 42, 60, 114, 132, 150, 204, 222, 240, 330, 402, 420, 510,....
7	70, 133, 322, 511, 700, 1015, 1141, 1204, 1330, 2023, 2212, 2401,....
8	80, 152, 224, 440, 512, 800, 1016, 1160, 1232, 1304, 1520,....
9	18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 108, 117, 126, 135, 144, 153, 162,....
10	190, 280, 370, 460, 550, 640, 730, 820, 910, 1090, 1180,....

विभाजक	हर्षद संख्यांची मालिका
11	209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 920, 2090, 3080, 4070,....
12	48, 84, 156, 192, 228, 264, 336, 372, 408, 444, 480, 516, 552,....
13	247, 364, 481, 715, 832, 1066, 1183, 1417, 1534, 1651,....
14	266, 392, 518, 644, 770, 1148, 1274, 1526, 1652, 1904,....
15	195, 285, 375, 465, 555, 645, 735, 825, 915, 1095, 1185,....
16	448, 592, 736, 880, 1168, 1456, 1744, 2176, 2464, 2608, 2752,....
17	476, 629, 782, 935, 1088, 1394, 1547, 1853, 2159, 2465, 2618,....
18	198, 288, 378, 468, 558, 648, 738, 828, 1098, 1188,....
19	874, 1387, 1558, 1729, 2584, 2755, 2926, 3097, 3268, 3439,....
20	3980, 4880, 5780, 6680, 7580, 8480, 9380, 12980, 13880,....

11. संख्या मालिकांचे अंतर्फरक (Intra differences)

$(T_{n+1} - T_n = d_n)$

संख्या मालिकांचे अंर्तफरक म्हणजे कोणत्याही संख्या क्रमिकेतील दोन क्रमागत संख्यांमधील फरक (दोन क्रमवार संख्यांची वजाबाकी) होय.

नैसर्गिक संख्या, पूर्ण संख्या आणि पूर्णांक संख्या संचामध्ये 'अंतर्फरक' 1 असतो. म्हणजे कोणत्याही नैसर्गिक संख्येमध्ये, पूर्ण संख्येमध्ये किंवा पूर्णांक संख्येमध्ये 'एक' मिळविला असता त्याच क्रमिकेतील पुढील क्रमागत संख्या मिळते आणि कोणत्याही नैसर्गिक संख्येमधून, पूर्ण संख्येमधून किंवा पूर्णांक संख्येमधून 'एक्र वजा केला असता त्याच क्रमिकेतील अगोदरची क्रमागत संख्या मिळते.

समसंख्या संचामध्ये आणि विषमसंख्या संचामध्ये 'अंर्तफरक'2 असतो. म्हणजे कोणत्याही सम संख्येमध्ये 2 मिळविले असता पुढील क्रमागत समसंख्या मिळते आणि कोणत्याही सम संख्येमधून 2 वजा केले असता आधिची क्रमागत समसंख्या मिळते. तसेच कोणत्याही विषम संख्येत 2 मिळविले असता पुढील क्रमागत विषम संख्या मिळते आणि कोणत्याही विषम संख्येमधून 2 वजा केले असता अगोदरची क्रमागत विषमसंख्या मिळते.

जेंव्हा दिलेल्या संख्या क्रमिकेतील 'अंतर्फरक' स्थिर (Constant) असेल तर त्या क्रमिकेला 'अंकगणिती श्रेढी' असे म्हणतात. नैसर्गिकसंख्या, पूर्णसंख्या, पूर्णांकसंख्या, समसंख्या आणि विषमसंख्या या संख्या क्रमिका विशेष प्रकारच्या अंकगणिती श्रेढीच आहेत. कोणत्याही संख्येचा पाढा म्हणजे त्या संख्येइतका अंतर्फरक असणारी पहिल्या दहा पदांची अंकगणित श्रेढीच होय. a, a+d, a+2d, a+3d,....a+(n-1) d या अंकगणित श्रेढी मध्ये "d' हा अंतर्फरक आहे याला साधारण फरक (common difference) असेही म्हणतात.

भूमिती श्रेढीमध्ये असणाऱ्या संख्या मालिकांमध्ये 'अंतर्फरक' हा स्थिरांक नसल्याचे आढळून येते.

उदाहणार्थ :

i) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,....या भूमिती श्रेढीतील संख्या आहेत. या क्रमिकेतील अंतर्फरक अनुक्रमे 1, 2, 4, 8, 32, 64,....या भूमिती श्रेढीतील संख्या आहेत. या क्रमिकेतील अंतर्फरक अनुक्रमे 1, 2, 4, 8, 16, 32,.... आहे. या अंतर्फरकांमुळे सुद्धा तीच संख्या क्रमिका तयार झालेली आहे.

ii) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187,....या भूमिती श्रेढीतील संख्या आहेत. या क्रमिकेत 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458,....अंतर्फरक आहेत. हे अंतर्फरक देखील एक भूमिती श्रेढी निर्माण करतात.

iii) 1, 10, 100, 1000, 10000,....ही एक भूमिती श्रेढी आहे. या क्रमिकेतील अंतर्फरक अनुक्रमे 9, 90, 900, 9000, ...या प्रमाणे आहे. ही सुद्धा एक भूमिती श्रेढीच आहे.

iv) सर्व सामान्यपणे असे म्हणता येईल की, जर $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots ar^{n-1}$ ही एक भूमिती श्रेढी असेल तर अंतर्फरकाने तयार होणारी क्रमिका $a(r-1), ar(r-1), ar^2 (r-1), ar^3 (r -1), \ldots ar^{n-1} (r-1)$ ही एक भूमिती श्रेढीच असते.

✻ 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55,....या त्रिकोणी संख्या आहेत.

या संख्या मालिकेचे सामान्यपद $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ आहे.

या संख्या मालिकेतील अंतर्फरक अनुक्रमे 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,....आहे. हा अंतर्फरक 1 ने वाढत गेलेला आहे. म्हणजेच त्रिकोणी संख्यांच्या अंतर्फरकाने आपल्याला एक अंकगणिती श्रेढी मिळते. या अंतर्फरक क्रमिकेतील प्रथम पद = a = 2 आहे आणि साधारण फरक = d = 1

त्रिकोणी संख्या	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
अंतर्फरक (पातळी 1)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
अंतर्फरक (पातळी 2)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

✻ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,....या पूर्ण वर्ग संख्या, चौरस संख्या (किंवा चतुष्कोणीय संख्या) आहेत. या संख्या मालिकेतील अंर्तफरक अनुक्रमे दोन क्रमागत नैसर्गिक संख्यांच्या बेरजे एवढा आहे. तसेच चौरस संख्यांमधील अंतर्फरक हा नेहमी विषम संख्याच असतो असे म्हणता येते. तसेच दोन क्रमागत चौरस संख्यांमधील फरक (अंतर्फरक हा त्या दोन संख्यांच्या वर्गमुळांच्या बेरजे इतका असतो असे ही म्हणता येते. जर t_n आणि t_{n+1} या दोन चौरस संख्या असतील तर

$t_{n+1} - t_n = \sqrt{t_{n+1}} + \sqrt{t_n}$

वर्ग संख्या	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
अंतर्फरक (पातळी 1)	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	
अंतर्फरक (पातळी 2)	2	2	2	2	2	2	2	2	2		

✻ 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000,....या सर्व घन संख्या आहेत. घन संख्यांमधील अंतर्फरक अनुक्रमे 7, 19, 37, 61, 127, 169, 217, 271,....ही एक संख्या मालिका आहे. या संख्या मालिकेचे सामान्यपद 3n (n + 1) +1 आणि $n \in N$ आहे.

घन संख्या	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
अंतर्फरक (पातळी 1)	7	19	37	61	91	127	169	217	271	
अंतर्फरक (पातळी 2)	12	18	24	30	36	42	48	54	60	
अंतर्फरक (पातळी 3)	6	6	6	6	6	6	6	6		

✻ 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145,....या पंचकोनीय संख्या आहेत. या संख्या मालिकेतील अंर्तफरक अनुक्रमे 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28,....आहे. ही एक अंकगणित श्रेढी आहे. या श्रेढीचा साधारण फरक 3 आहे.

पंचकोनीय संख्या	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
अंतर्फरक (पातळी 1)	4	7	10	13	16	19	22	25	28	
अंतर्फरक (पातळी 2)	3	3	3	3	3	3	3	3		

✻ 1, 6, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190,....या षट्कोनीय संख्या आहेत. या संख्या क्रमिकेतील अंतर्फरक अनुक्रमे 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37,....आहे. ही एक अंकगणित श्रेढी असून या श्रेढीतील साधारण फरक 4 आहे.

षट्कोनीय संख्या	1	6	15	28	45	66	91	120
अंतर्फरक (पातळी 1)	5	9	13	17	21	25	29	
अंतर्फरक (पातळी 2)	4	4	4	4	4	4		

✻ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584,....ही फिबोनकी संख्यांची क्रमिका आहे. या संख्या मालिकेतील अंर्तफरक 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,....आहे.

फिबोनकी संख्या	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
अंर्तफरक (पातळी 1)	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	
अंर्तफरक (पातळी 2)	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55		
अंर्तफरक (पातळी 3)	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21			
अंर्तफरक (पातळी 4)	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8				
अंर्तफरक (पातळी 5)	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3					
अंर्तफरक (पातळी 6)	5	-3	2	-1	1	0	1	1						

i) 1, 3, 5, 7 आणि 9 या एक अंकी स्वयंभू संख्या आहेत. त्यांच्यातील अंर्तफरक 2 आहे.

ii) 09, 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97 आणि 108 या स्वयंभू संख्यांमधील अंर्तफरक 11 आहे.

iii) 110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, आणि 187 या स्वयंभू संख्या आहेत. या सर्व स्वयंभू संख्यांना 11 ने निःशेष भाग जातो. तसेच त्यांच्यातील अंर्तफरक 11 आहे.

काही निर्मित संख्यांच्या क्रमिक आणि त्यांच्यातील अंतर्फरक पुढील प्रमाणे आहेत.

निर्मित संख्या	2	4	8	16	23	28	38	49	62	70	77	91	101	103
अंतर्फरक (पातळी 1)	2	4	8	7	5	10	11	13	8	7	14	10	2	
अंतर्फरक (पातळी 2)	2	4	-1	-2	5	1	2	-5	-1	7	-4	-8		
अंतर्फरक (पातळी 3)	2	-5	-1	7	-4	1	-7	4	8	-11	-4			
अंतर्फरक (पातळी 4)	-7	4	8	-11	5	-8	11	4	-19	7				

निर्मित संख्या	6	12	15	21	24	30	33	39	51	57	69	84	96	111
अंतर्फरक (पातळी 1)	6	3	6	3	6	3	6	12	6	12	15	12	15	
अंतर्फरक (पातळी 2)	-3	3	-3	3	-3	3	6	-6	6	3	-3	3		
अंतर्फरक (पातळी 3)	6	-6	6	-6	6	3	-12	12	-3	-6	6			
अंतर्फरक (पातळी 4)	-12	12	-12	12	-3	-15	24	-15	-3	12				

निर्मित संख्या	10	11	13	17	25	32	37	47	58	71	79	95	109	119
अंतर्फरक (पातळी 1)	1	2	4	8	7	5	10	11	13	8	16	14	10	
अंतर्फरक (पातळी 2)	1	2	4	-1	-2	5	1	2	-5	8	-2	-4		
अंतर्फरक (पातळी 3)	1	2	-5	-1	7	-4	1	-7	13	-10	-2			
अंतर्फरक (पातळी 4)	1	-7	4	8	-11	5	-8	20	-23	8				

निर्मित संख्या	14	19	29	40	44	52	59	73	83	94	107
अंतर्फरक (पातळी 1)	5	10	11	4	8	7	14	10	11	13	8
अंतर्फरक (पातळी 2)	5	1	-7	4	-1	7	-3	1	3	-5	
अंतर्फरक (पातळी 3)	-4	-8	11	-5	8	-10	4	2	8		
अंतर्फरक (पातळी 4)	-4	19	-16	13	-18	14	-2	6			

निर्मित संख्या	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	117	126
अंतर्फरक (पातळी 1)	9	9	9	9	9	9	9	9	9	18	9	
अंतर्फरक (पातळी 2)		0	0	0	0	0	0	0	0	9	-9	

वरील सारणींचे निरीक्षण करता असे अनुमान काढता येते की 1, 5, 7, 20, 31, 53, 64,....इत्यादी (3 ने भाग न जाणाऱ्या) स्वयंभू संख्यांपासून निर्मित संख्यांच्या ज्या क्रमिका तयार होतात त्या क्रमिकांमध्ये जे अंर्तफरक आहेत त्या मध्ये वेगवेळेपणा आढळून येतो. अशा सर्व क्रमिकांचे संगम वेगवेगळ्या 'संगम संख्यांपाशी' होतात.

3, 42, 75, 132, 165,....या 3 ने भाग जाणाऱ्या (परंतु 9 ने भाग न जाणाऱ्या) स्वयंभू संख्या आहेत. या स्वयंभू संख्यांपासून ज्या निर्मित संख्यांच्या क्रमिका प्राप्त होतात त्यांच्यातील अंर्तफरकांच्या संख्या मालिकेतील सर्व अंर्तफरकांना 3 ने निःशेष भाग जातो.

9, 108, 198,....इत्यादी स्वयंभू संख्यांपासून ज्या निर्मित संख्यांख्या क्रमिका तयार होतात त्यांच्या अंर्तफरकाने मिळणाऱ्या संख्याही 9 ने विभाज्य असतात.

11. उपसंहार

संख्या मालिकांचे अध्ययन करताना मनोरंजन होत असते. परंतु केवळ मनोरंजन करणे हा संख्यामालिकांचा उद्देश नाही. 'विशेषाकडून - सामान्याकडे' या अध्ययन अनुभूतीचा प्रत्यय आपल्याला संख्यामालिकांचे अवलोकन करताना होतो. संख्यांचे विशेष गुणधर्म अभ्यासताना असेही आढळून येते की एकच संख्या वेगवेगळ्या संख्या समूहांची घटक असू शकते. उदाहरणार्थ 97 ही संख्या 'अविभाज्य संख्या मालिकेची' घटक आहे आणि 97 ही संख्या 'स्वयंभू संख्या मालिकेची' घटक आहे. तसेच कापरेकर स्थिरांक 6174 आणि श्रीनिवास रामानुजन स्मारक संख्या 1729 या दोन्ही संख्या या 'हर्षद संख्याही' (स्वत:च्या अंकांच्या बेरजेने विभाज्य असलेल्या संख्या) आहेत.

संख्यामालिकांचे अध्ययन करताना आपल्याला तर्कशास्त्राचा भरपूर आधार घ्यावा लागतो. कारण काही संख्यांचे अवलोकन करून त्या सर्व संख्यांमध्ये असणारा 'सामाईक गुणधर्म' (Common property) शोधावा लागतो. त्या गुणधर्माचा आधार घेऊन त्याच प्रकारच्या आणखी काही संख्यांबाबत भाकिते करण्यासाठी आपण सामान्यीकरण (Generalisation) करून एक सामान्यपद निर्माण करतो, त्या सामान्यपदातील बैजिक चलामध्ये असणारे संबंध लक्षात घेऊन अपेक्षित पदे शोधून काढतो. आपण शोधलेल्या पदांच्या सत्यतेबाबतचा पडताळा घेऊ शकतो. तसेच काही संख्यामालिकांचा नैसर्गिक घटनांशी काही संबंध आहे काय ? या बाबतचाही मागोवा घेता येतो.

संख्यामालिकांच्या अध्ययनाचा उपयोग 'स्पर्धा परीक्षा' देऊ इच्छिणाऱ्या अभ्यासकांनाही होत असतो. संख्या मालिकेतील संख्यांच्या गुणधर्मांचे अवलोकन करताना किंवा गुणधर्म पडताळून पाहताना काही 'गणन क्रिया' झटपट केल्या जातात. त्यामुळे आकडेमोडीच्या काही युक्त्या देखील अवगत होतात. काही जण अंकगणितातील आकडेमोडीमुळे गणिताचा 'धसका' घेत असतात. हा धसका संख्यामालिकांच्या अभ्यासाने दूर होण्यास साहाय्य होत असते. गणन क्रियेबाबतचा 'धसका' दूर झाला तर आकडेमोडीबाबत आत्मविश्वास प्राप्त होतो आणि उदाहरणे सोडविताना जलद आकडेमोड करून वेळ वाचविता येतो.

संख्यामालिकांचा अभ्यास हा संख्यांचे वर्गीकरण (Classification) करण्याचा प्रकार आहे. वर्गीकरणाचा उपयोग हा नेहमी 'शितावरून भाताची परीक्षा' करण्याचा प्रकार आहे असे म्हणणे वावगे होणार नाही. कोणत्याही संख्या मालिकेतील तीन-चार संख्यांचा विचार करून त्या संख्या मालिकेतील संख्यांच्या गुणधर्मांबाबत अनुमाने काढणे हे वर्गीकरण पद्धतीने सहज शक्य होत असते. त्यामुळे काही वेळा काही संख्या मालिकांचा उपयोग 'सांकेतिकी करणासाठी' (Coding-decoding) सुद्धा होऊ शकतो. संख्यांचे 'संवेश' (Permutation) आणि 'क्रमवेश' (Combination) देखील सांकेतिकी करणासाठी उपयुक्त ठरतात.

अक्षरजुळणी
टाईप इनोव्हेटर्स, सातारा. फोन :- (02162) 234372

संपादक
नागेश शंकर मोने

संपादन साह्य
श्री. अरूण सावंत
श्री. भगवान भुजबळ
सौ. अनुराधा जोशी

प्रकाशक
श्री.दिनकर वि. फरांदे
अध्यक्ष, वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ
वाई

प्रकाशन वर्ष
18 सप्टेंबर 2008

लेखक
श्री.दिलीप गोटखिंडीकर
'कृष्णप्रभा', 8 सौभाग्यनगर,
गंगापूर रोड, नाशिक : 422 013
दूरध्वनी - (0253)-2311471

मूल्य रूपये - 40/-

प्रस्तुत पुस्तिका तयार करण्याच्या कामात डॉ.श्री.रवींद्र कुलकर्णी, पुणे यांनी व त्यांच्या ट्रस्टने केलेल्या आर्थिक मदतीमुळेच, अल्प किमतीत ही पुस्तिका आपल्यापर्यंत येत आहे.

वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

1.	मिश्र संख्या	-	प्रा.म.रा.राईलकर	15.00
2.	विभागणी व तिची भावंडे	-	डॉ.व.ग.टिकेकर	15.00
3.	गणिती युक्तिवाद	-	प्रा.य.ना.वालावलकर	15.00
4.	गणित मौज	-	श्री.ना.शं.मोने	15.00
5.	कोनाचं त्रिभाजन	-	प्रा.म.रा.राईलकर	15.00
6.	संख्यानगरीत भटकंती	-	श्री.पी.के.श्रीनिवासन् अनुवाद : डॉ.मधुकर देशपांडे	20.00
7.	गणितातील कयास, खरे व चुकलेले	-	डॉ.व.ग.टिकेकर	20.00
8.	क्षेत्रफळ आणि घनफळ, काही तात्त्विक पैलू	-	डॉ.रवींद्र बापट	20.00
9.	ऋण संख्या	-	प्रा.म.रा.राईलकर श्री.ना.शं.मोने	20.00
10.	भूमितीय रचना	-	श्री.ना.शं.मोने	20.00
11.	सममिती आणि इतर	-	प्रा.म.रा.राईलकर	20.00
12.	दिनदर्शिकेमधली जादू	-	श्री.पी.के.श्रीनिवासन अनुवाद : डॉ.मधुकर देशपांडे	20.00
13.	एकाच माळेचे मणी	-	श्री.ना.शं.मोने	20.00
16.	दोन मुलाखती	-	संकलन : श्री.ना.शं.मोने	20.00
17.	गणितींचे किस्से	-	डॉ.व.ग.टिकेकर	20.00
18.	निर्देशक भूमिती	-	प्रा.म.रा.राईलकर	20.00
19.	त्रिकोण नगरीसह भूमितीची विविधता	-	प्रा.डॉ.सदाशिव देव	50.00
20.	संख्यामालिका	-	श्री.दिलीप गोटखिंडीकर	40.00
21.	अपूर्णांक : आजीकडून शिका (सी.डी.)	-	प्रा.म.रा.राईलकर	40.00
22.	कापा आणि जोडा (सी.डी.)	-	प्रा.म.रा.राईलकर	50.00

गणित अध्ययन - अध्यापन - विकसन संस्था, नाशिक

1.	M.T.S. / N.T.S. व अन्य स्पर्धांसाठी गणित प्रश्नसंग्रह	-	श्री.ल.म.भुजबळ, देवळाली कँप	100.00
2.	Question Bank (Mathematics) For M.T.S. / N.T.S. and other competitive examinations.	-	L.M.Bhujbal, Bhas Bhamre,Nasik	100.00
3.	गणित मोती - विचारांना चालना देणारे गणित विषयक लेख	-	डॉ.व.ग.टिकेकर,	45.00
4.	जलद आकडेमोडीच्या 13 युक्त्या	-	मूळ लेखक-श्री.दत्तात्रय कापरेकर, अनुवाद : श्री.दिलीप गोटखिंडीकर	25.00
5.	**गणित : छंद-आनंद** त्रैमासिक		(वार्षिक वर्गणी)	75.00
1.	गणित गुणगान	-	श्री.ना.शं.मोने	50.00
2.	उत्तरातून प्रश्ननिर्मिती (8 वी, 9 वी, 10 वी साठी) भूमितीविषयक प्रश्नांची विशेष चर्चा.	-	श्री.ना.शं.मोने	125.00
3.	विज्ञान म्हणजे काय ?	-	श्री.ना.शं.मोने	5.00
4.	शैक्षणिक संदर्भ : विज्ञान विषयक द्वैमासिक		(वार्षिक वर्गणी)	125.00

सर्व पुस्तकांसाठी श्री.ना.शं.मोने, 1123, भाग्योदय, ब्राह्मणशाही, वाई.
दूरध्वनी : (02167) 220766. मोबाईल : 9226283203. यांच्याशी संपर्क साधावा.

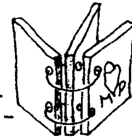
लेखकाविषयी :

श्री. दिलीप गोटखिंडीकर

- ◆ निवृत्त माध्यमिक शिक्षक
- ◆ महाराष्ट्र राज्य गणित महामंडळाचे माजी अध्यक्ष
- ◆ गणित विषयाच्या राष्ट्रीय व आंतरराष्ट्रीय परिषदांमध्ये सहभागी
- ◆ गणित विषय मनोरंजक पद्धतीने शिकविण्यात हातखंडा
- ◆ गंमत गणिताची, जलद आकडेमोडीच्या तेरा युक्त्या आदी पुस्तके प्रकाशित



पुस्तिका क्र. 20



वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

द्वारा : श्री.ना.शं.मोने, 1123, भाग्योदय, ब्राह्मणशाही, वाई - 412 803.
दूरध्वनी : (02167) 220766, Email : nagesh.mone@gmail.com